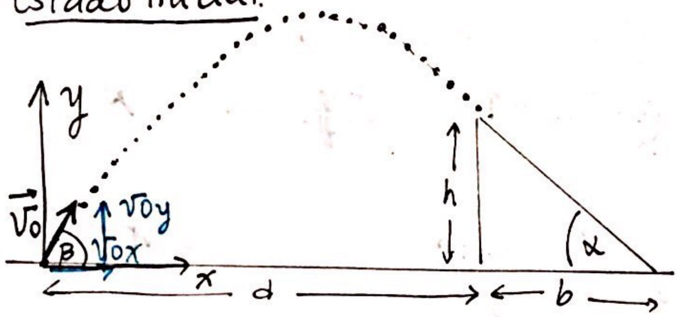
PAUTA AUXILIAR #4

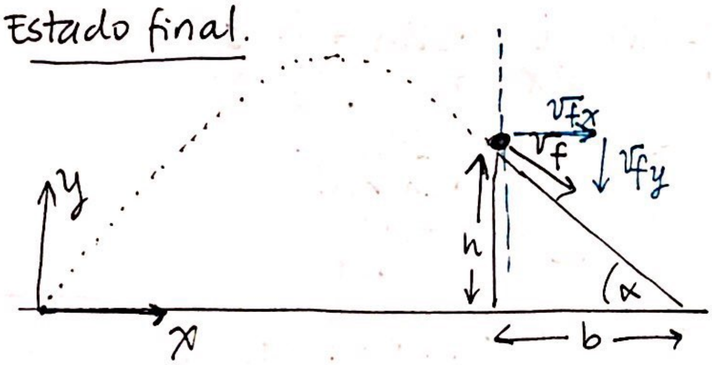
P1 Para abordar este problema se recomienda considerar el principio de superposición, el cual indica que un movimiento 2D puede entenderse como la suma de 2 movimientos en 1D, es por esto que es importante identificar la independencia de estos y la descripción precisa de cada cual.

(I) DEFINICIÓN DE ESQUEMAS.

Estado inicial.



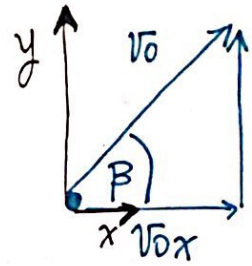
Estado final.



Para ser consistentes es necesario descomponer los vectores de acuerdo al sistema de referencia, es decir nos importa ponerles un signo positivo a los que apuntan en favor del sistema de referencia, y negativo en el caso contrario.

Descomposición de vectores.

Estado inicial.



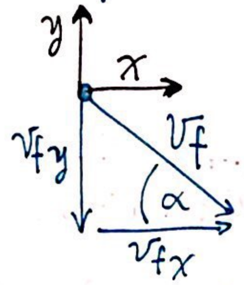
$$\underbrace{v_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}}$$

esta notación indica que la magnitud en el eje x es independiente de la magnitud en eje y. ($\hat{j}$).

$$v_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$$

$$v_0 = \underbrace{v_0 \cdot \cos\beta}_{\text{componente horizontal}}\,\hat{i} + \underbrace{v_0 \cdot \operatorname{sen}\beta}_{\text{componente vertical.}}\,\hat{j}$$

Estado final.



Notar que se usa el mismo ángulo α que la inclinación del tobogán, esto es pues son paralelas la pendiente del tobogán con la v_f.

$$v_f = v_{fx}\hat{i} - v_{fy}\hat{j}$$

$$v_f = v_f \cdot \cos\alpha\,\hat{i} - v_f \operatorname{sen}\alpha\,\hat{j}$$

Considerando entonces relaciones trigonométricas se tiene que:

$$\left[\tan\alpha = \frac{h}{b} = \frac{-v_{fy}}{v_{fx}} = \frac{-v_f \operatorname{sen}\alpha}{v_f \cos\alpha}\right]$$

(II) RECONOCER FENÓMENO FÍSICO & LAS FÓRMULAS QUE LO MODELAN.

eje x:

como no está alterado por factores externos presenta un movimiento rectilíneo, de manera que las ecuaciones que lo definen son:

$$x(t) = v_{0x} \cdot t$$

$$v_x(t) = v_{0x} \longrightarrow \text{será constante para todo tiempo}$$

eje y:

será alterado por la gravedad, de este modo será modelado como un lanzamiento vertical hacia arriba.

$$y(t) = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y(t) = v_{0y} - gt$$

(III) Construir & RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES.

· el instante de mayor interés es cuando la tortuga llega al tobogán, a ese instante lo llamaremos "t_f", en ese instante se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} x(t_f) = d \\ x(t_f) = v_{0x} \cdot t_f \end{array}\right\} \begin{array}{l} v_{0x} \cdot t_f = d \\ \Rightarrow t_f = d/v_{0x}. \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(t_f) = h \\ y(t_f) = v_{0y} t_f - \frac{1}{2} g t_f^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} h = v_{0y} \cdot t_f - \frac{1}{2} g t_f^2 \\ h = \frac{v_{0y} \cdot d}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_{0x}}\right)^2 \end{array}$$

$(*)$

$$\left.\begin{array}{l} v_x(t_f) = v_{0x} \\ v_x(t_f) = v_{fx} \end{array}\right\} v_{0x} = v_{fx}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_y(t_f) = v_{0y} - g t_f \\ v_y(t_f) = v_{fy} \end{array}\right\} \begin{array}{l} v_{0y} - g t_f = v_{fy} \\ v_{0y} - g \frac{d}{v_{0x}} = v_{fy} \end{array}$$

considerando todo lo anterior y resolviendo se tiene lo siguiente:

$$\tan \alpha = \frac{h}{b} = \frac{-v_{fy}}{v_{fx}} = \frac{\frac{gd}{v_{0x}} - v_{0y}}{v_{0x}}$$

$$(\bigstar) \Rightarrow \frac{h}{b} = \frac{gd - v_{0y} \cdot v_{0x}}{v_{0x}^2}$$ notar que ahora depende de v_{0y} y v_{0x}.

utilizando la expresión $(*)$ se tiene que

$$(\bigstar\bigstar)\ h = \frac{v_{0y} \cdot d}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_{0x}^2}$$

contamos con 2 ecuaciones independientes y 2 incógnitas, por lo que se puede resolver, se despeja v_{0y} de ambas ecuaciones anteriores y se iguala,

$$-\frac{h}{b} \cdot v_{0x} + \frac{gd}{v_{0x}} = v_{0y}. \longrightarrow \text{de } (\bigstar)$$

$$\frac{h}{d} v_{0x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dg}{v_{0x}} = v_{0y} \longrightarrow \text{de} (\bigstar\bigstar)$$

$$-\frac{h}{b} v_{0x} + \frac{gd}{v_{0x}} = \frac{h}{d} v_{0x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dg}{v_{0x}}$$

$$\Longrightarrow v_{0x} = d \sqrt{\frac{gb}{2h(b+d)}}$$

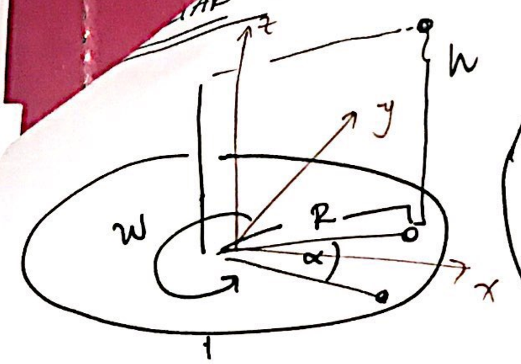
$$v_{0x}\left(\frac{h}{d} + \frac{h}{b}\right) = \frac{dg}{2 v_{0x}}$$

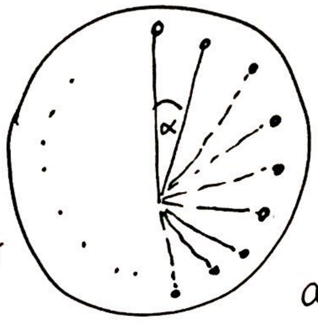
$$\Rightarrow v_{0x}^2 = \frac{dg}{2h}\left(\frac{b+d}{db}\right)^{-1} \Rightarrow \boxed{v_{0x} = d \sqrt{\frac{bg}{2h(b+d)}}}$$

ahora basta reemplazar esta expresión en $(\bigstar)$

$$\boxed{v_{0y} = \frac{\cancel{d} g}{\cancel{d}} \sqrt{\frac{2h(b+d)}{bg}} - \frac{h}{b} \cdot d \sqrt{\frac{bg}{2h(b+d)}}}$$

...AR 4: PREGUNTA 3





N perforaciones

$$\boxed{\alpha = \frac{2\pi}{N}}$$

Distancia Temporal entre 1 agujero y otro es el tiempo en que demora en caer una bolita

la caida de la pelotita se da en el eje z, y el giro del disco en el plano xy.

$$z(t) = h - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t^* : \text{tiempo que demora en caer}$$

$$0 = h - \frac{gt^{*2}}{2}$$

$$\frac{gt^{*2}}{2} = h \Rightarrow \boxed{+\sqrt{\frac{2h}{g}} = t^*}$$

$$\frac{\alpha}{w} = t^* = \text{coincide con el tiempo que separa cada agujero.}$$

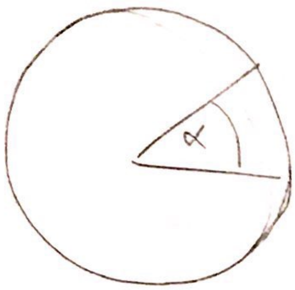
$$\Rightarrow \boxed{\frac{2\pi}{Nw} = t^*}$$

$$\frac{2\pi}{Nw} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad /()^2$$

$$\frac{4\pi^2}{N^2w^2} = \frac{2h}{g}$$

$$\boxed{g\frac{2\pi^2}{N^2w^2} = h}$$

AUXILIAR 4: PREGUNTA 2



$30\ rpm = 30$ revoluciones por minuto

"Esto tiene unidades de frecuencia, para trabajar siempre se prefieren las unidades de medida para el S.I (sistema Internacional) por lo que es necesario presentar la frecuencia en $Hz = 1/seg$.

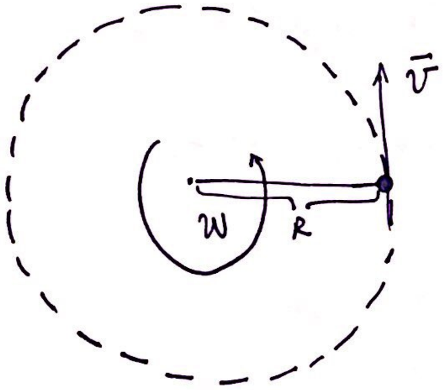
[Recordar que los ángulos deben ser escritos en radianes]

$$\frac{30\ \text{ciclos}}{1\ \text{min}} = \frac{30\ \text{ciclos}}{60\ \text{seg}} = \boxed{\frac{1}{2}\ Hz}$$

▶ Diferenciar Velocidad Tangencial v/s rapidez angular. ($\vec{v}$ v/s w)

• La velocidad tangencial corresponde a la componente tangente a la trayectoria circular de un móvil o partícula. y es proporcional al radio

rapidez angular: Notar que a priori no se le considera una cantidad vectorial, ya que nos interesa para efectos del curso entender que corresponde a los ángulo recorridos en radianes para un período de tiempo.

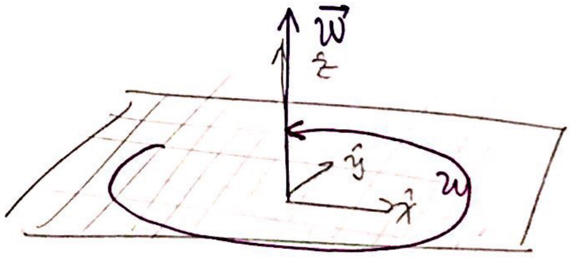


$$v = w \cdot R$$

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

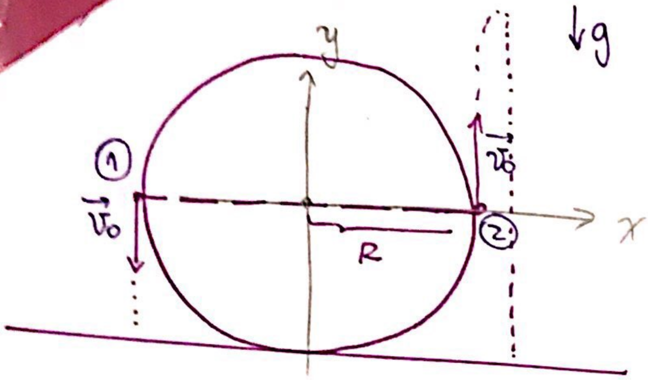
$$f = \frac{w}{2\pi}$$

Es importante destacar que SI Existe la velocidad angular y corresponde al vector generado por la regla de la mano derecha.



∴ en nuestro problema $w = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\ Hz$

$$w = \pi\ rad/seg$$



La velocidad inicial de ambas es igual en módulo pero distinta en sentido.

Estrategia: Vamos a calcular cuanto tiempo se demorará la masa ① en llegar al suelo, luego cuánto tiempo tarda en llegar la masa ② en llegar al suelo, luego igualaremos esta medida al periodo. y diremos que este se relaciona con el radio el la velocidad tangencial.

1°. Calculando Cuanto demora la masa 2 en llegar al suelo.

$$y_2(t) = 0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

condición de llegar al suelo. (+) usar $wR = v_0$

$$-R = wR \cdot t^* - \frac{gt^{*2}}{2}.$$

anotando de forma cuadrática

$$\frac{gt^{*2}}{2} - t^* wR - R = 0$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{wR \pm \sqrt{w^2R^2 + \frac{4gR}{2}}}{g}$$

Tomamos la opción (+), en caso de elegir el (−) resulta un tiempo negativo y no nos interesa ese caso.

$$\Rightarrow t^* = \frac{wR + \sqrt{w^2R^2 + 2gR}}{g}$$

usando datos enunciado $w = \pi \left[\frac{rad}{seg}\right]$

$$\boxed{t_2 = \frac{\pi R + \sqrt{\pi^2 R^2 + 2gR}}{g}}$$

...lculando cuanto demora la masa 1 en llegar al suelo (Análogo al anterior)

$$y_1(t) = 0 - v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$-R = -wRt^* - \frac{gt^{*2}}{2}$$

$$\frac{gt^{*2}}{2} + wRt^* - R = 0$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{-wR \pm \sqrt{w^2R^2 + 4\frac{Rg}{2}}}{g}$$

$$t^* = \frac{-wR + \sqrt{w^2R^2 + 2Rg}}{g}$$

$$\boxed{t_1 = \frac{-\pi R + \sqrt{\pi^2R^2 + 2Rg}}{g}}$$

Sabemos que $t_2 - t_1 = T = \frac{1}{f} = 2\,seg$

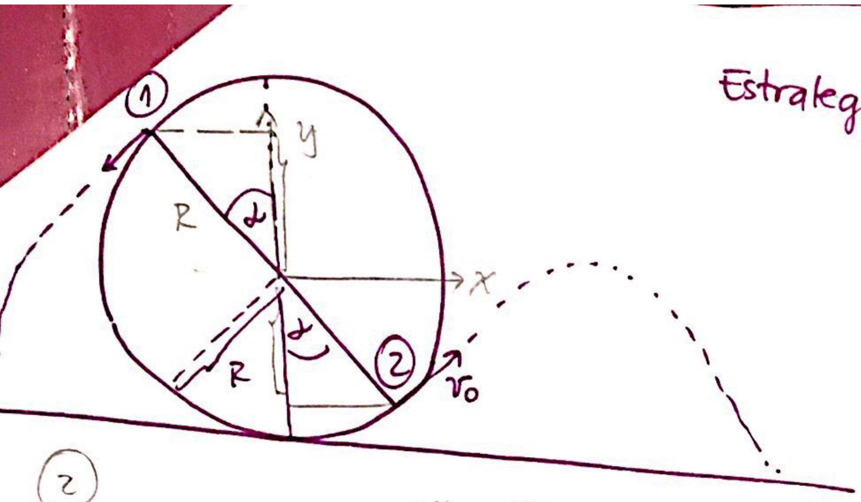
$$\left(\frac{\pi R + \sqrt{\pi^2R^2 + 2gR}}{g}\right) - \left(\frac{-\pi R + \sqrt{\pi^2R^2 + 2gR}}{g}\right) = 2\,seg$$

$$\frac{\pi R}{g} + \cancel{\frac{\sqrt{\pi^2R^2 + 2gR}}{g}} + \frac{\pi R}{g} - \cancel{\frac{\sqrt{\pi^2R^2 + 2gR}}{g}} = 2$$

Notar que todo está en Unidades de medida del S.I.

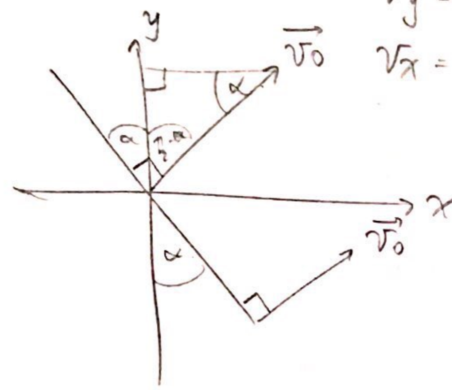
$$\frac{\cancel{2}\pi R}{g} = \cancel{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{g}{\pi}}$$



Estrategia: Vamos a calcular cuánto se demorará por separado cada piedra en llegar al suelo e igualaremos el tiempo de ambas ecuaciones y despejaremos el valor de α. Para comenzar es necesario descomponer el vector velocidad tangencial en el eje "x" e "y":

②

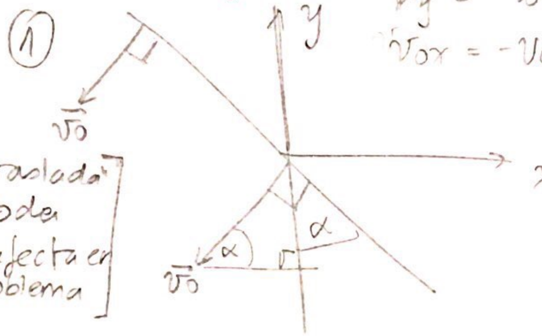


$V_y = V_0 \cdot \text{sen}\,\alpha$

$V_x = V_0 \cos\alpha$

[Notar que solo se trasladó el vector Vo para poder descomponerlo, y no afecta en nada el resto del problema]

①



$V_y = -V_0 \,\text{sen}\,\alpha$

$V_{0x} = -V_0 \cos\alpha$.

Ecuaciones Itinerario para ① y ② (las explicaciones de los pasos son análogas a la parte (a))

① $\begin{cases} y_1(t) = R\cdot\cos\alpha - V_0\,\text{sen}\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x_1(t) = -R\,\text{sen}\,\alpha - V_0\cos\alpha\cdot t \end{cases}$

② $\begin{cases} y_2(t) = -R\cos\alpha + V_0\,\text{sen}\,\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x_2(t) = R\,\text{sen}\,\alpha + V_0\cos\alpha\cdot t \end{cases}$

si ① llega al suelo en t_1 en ese mismo instante ② llegará al suelo en t_2

$$-R = R\cos\alpha - V_0\,\text{sen}\,\alpha\cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$-R = -R\cos\alpha + V_0\,\text{sen}\,\alpha\, t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$$

$t_1 = t_2$

Calculando t_1

$$\frac{1}{2}gt_1^2 + V_0\,\text{sen}\,\alpha\cdot t_1 - (R + R\cos\alpha) = 0$$

$$t_1 = \frac{-v_0 \operatorname{sen}\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 2gR(1+\cos\alpha)}}{g}$$

$$t_1 = \frac{-v_0 \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 2gR(1+\cos\alpha)}}{g}$$

$$t_1 = \frac{-\pi R \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{\pi^2 R^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 2gR(1+\cos\alpha)}}{g}$$

$v_0 = w \cdot R$
$w = \pi\,[rad/seg]$
$\Rightarrow v_0 = \pi R.$

Calculando t_2

$$-R = -R\cos\alpha + v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$$

$$\frac{1}{2} g t_2^2 - v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t_2 - R(1-\cos\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 2gR(1-\cos\alpha)}}{g}$$

$$t_2 = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 2gR(1-\cos\alpha)}}{g}$$

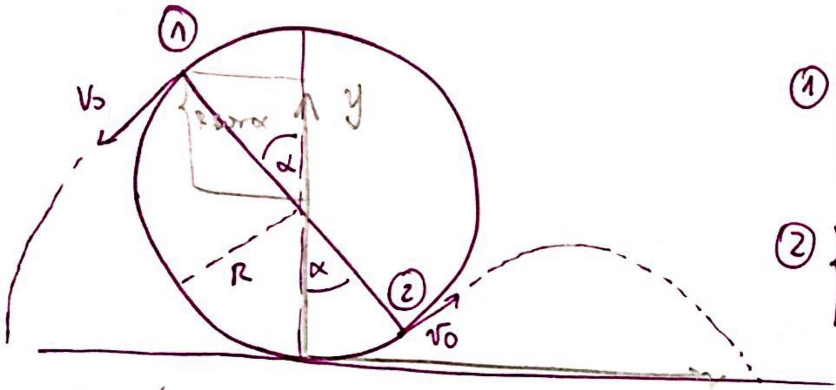
$$t_2 = \frac{\pi R \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{\;^2\;^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 2gR(1-\cos\alpha)}}{g}$$

$t_1 = t_2$

$$\frac{-\pi R \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{\pi^2 R^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 2gR(1+\cos\alpha)}}{g} = \frac{\pi R \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{\pi^2 R^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 2gR(1-\cos\alpha)}}{g}$$

$$\sqrt{\pi^2 R^2 \operatorname{sen}\alpha + 2gR(1+\cos\alpha)} - \sqrt{\pi^2 R^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 2gR(1-\cos\alpha)} = 2\pi R \operatorname{sen}\alpha.$$

emos que el desarrollo es muy extenso... busquemos una forma más simple de resolverlo, mediante un cambio en el sistema de referencia.



Ecuaciones Itinerario para ① y ②

① $\begin{cases} y_1(t) = R + R\cos\alpha - V_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x_1(t) = -R\operatorname{sen}\alpha - V_0 \cos\alpha\, t. \end{cases}$

② $\begin{cases} y_2(t) = R - R\cos\alpha + V_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x_2(t) = R\operatorname{sen}\alpha + V_0 \cos\alpha \cdot t \end{cases}$

Al momento de definir ecuaciones podemos notar que para efectos prácticos el tomar otro sistema de referencia no afecta mucho, entonces probemos con otro tipo de desarrollo matemático

$$0 = R + R\cos\alpha - V_0 \operatorname{sen}\alpha\, t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} \quad (A)$$

$$0 = R - R\cos\alpha + V_0 \operatorname{sen}\alpha\, t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} \quad (B)$$

$(A) = (B)$

$$\cancel{R} + R\cos\alpha - V_0 \operatorname{sen}\alpha\, t^* \cancel{- \frac{1}{2} g t^{*2}} = \cancel{R} - R\cos\alpha + V_0 \operatorname{sen}\alpha\, t^* \cancel{- \frac{1}{2} g t^{*2}}$$

$$\cancel{2} R\cos\alpha = \cancel{2} V_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t^*$$

$w = \pi$ $\quad V_0 = wR = \pi R$

$$\frac{\cancel{R}}{\pi \cancel{R}} \cdot \frac{1}{\tan\alpha} = t^*$$

$$\boxed{\frac{\operatorname{cotang}\alpha}{\pi} = t^*} \quad (C)$$

plazando (C) en (A) se tiene que

$$0 = R + R\cos\alpha + -\cancel{\pi} R \cdot \cancel{\operatorname{sen}\alpha} \cdot \left[\frac{\cos\alpha}{\cancel{\operatorname{sen}\alpha}} \cdot \frac{1}{\cancel{\pi}} \right] - \frac{1}{2} g \left[\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} \cdot \frac{1}{\pi^2} \right]$$

$$0 = R\,(1 + \cancel{\cos\alpha}) - \cancel{R\cos\alpha} - \frac{1}{2}\frac{g}{\pi^2}\left[\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\right]$$

$$\frac{1}{2} g \left[\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} \right] \cdot \frac{1}{\pi^2} = R$$

$$\frac{g}{2\pi^2 R} = \tan^2\alpha$$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha = \text{Arctang}\left(\sqrt{\frac{g}{2\pi^2 R}}\right)}$$