

CONTROL 1

- (1) (a) (0.75 ptos) Sea H un grafo en h vertices, y sea $H + H$ el grafo que consiste en dos copias disjuntas de H . Muestre que $\text{ex}(n, H + H) \leq \text{ex}(n, H) + nh$.
- (b) (0.75 ptos) Aplicando resultados vistos en clase, determine $\text{ex}(n, P)$ asintóticamente, donde P es el grafo de Petersen.
- (c) (0.75 ptos) Sean H, G grafos tal que H es conexo. Demuestre que $R(H, G) \geq (|V(H)| - 1)(\chi(G) - 1) + 1$.
- (d) (0.75 ptos) Muestre que $\text{ex}(n, T^+) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$, donde T^+ es el grafo en vertices a, b, c, d y aristas ab, bc, ca, cd .
- (2) (a) (1 pto) Demuestre la existencia de una 2-coloración de K_n tal que el número total de copias monocromáticas de K_4 en esta coloración es a lo más $\binom{n}{4} \cdot 2^{-5}$.
- (b) (2 ptos) Sean $s, t \geq 2$. Demuestre que existe una constante $c > 0$ tal que
- $$\text{ex}(n, K_{s,t}) \geq cn^{2 - \frac{(s+t-2)}{(st-1)}}.$$
- (3) (a) (1.5 ptos) Sea $r \in \mathbb{N}$ y sea $K_{\aleph_0}$ el grafo completo en un número infinito contable de vertices. Muestre que cada coloración de las aristas de $K_{\aleph_0}$ con r colores induce una copia monocromática de $K_{\aleph_0}$.
- (b) (1.5 ptos) Deduzca que cada secuencia $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ contiene una de las siguientes: una subsecuencia constante, una subsecuencia estrictamente creciente o una subsecuencia estrictamente decreciente.

Bonus (1.5 ptos): Demuestre que la conjetura de Tree-packing de Gyárfás y Lehel es cierta si todos menos a lo más uno de los árboles T_i son estrellas.