MA1002-2 Análisis Funcional
Profesores: Aris Danilidis
Auxiliares: Bastián Espinoza
Juan Pedro Ross, Eduardo Silva.
Fecha: Miércoles 20 de Junio.

Auxiliar 13: Ideales y Álgebras de Banach

"Recuerdo" de álgebra:

- Dado un anillo $(\mathcal{A},+,\cdot)$ y un subconjunto $\mathcal{I}$, el cociente $(\mathcal{A}/\mathcal{I},+,\cdot) = \{[a] : a \in \mathcal{A}\}$, donde $[a] = \{b \in \mathcal{A} : a - b \in I\} = a + I$, con las operaciones $(a+I)+(b+I) = a+b+I$, $(a+I)(b+I) = ab+I$ es un anillo si y solo si I es ideal, esto es necesario pues cuando uno escribe $(a+I)(b+I)$ está indicando la multiplicación de todos los elementos de la forma $(a+i)(a+i') = a + ai' + ia + ii'$, y para asegurar que $ai' + ia + ii' \in I$ es necesario que este sea un anillo.

- Suma de ideales es ideales: en efecto Sean I,J ideales de $\mathcal{A}$, luego para todo elemento a en $\mathcal{A}$,i en $\mathcal{I}$, j en $\mathcal{J}$ se cumple que $a(i+j) = ai + aj \in \mathcal{I} + \mathcal{J}$, pues estos son ideales.

- (r), es el ideal generado por r, es decir $\{bra : a, b \in \mathcal{A}\} = \{ra : b \in \mathcal{A}\}$, si este es conmutativo.

- El neturo para la suma de $(\mathcal{A}/\mathcal{I},+,\cdot)$, es $\mathcal{I}$ y para la multiplicación es $1+\mathcal{I}$, donde 1 es el neutro para la multiplicación de $\mathcal{A}$.

P1. Sea $\mathcal{A}$ álgebra conmutativa e $\mathcal{I}$ ideal de $\mathcal{A}$. Demuestre que:

a) Si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$ y $\mathcal{J}$ es ideal de A, entonces $\mathcal{J} \setminus \mathcal{I}$ es un ideal de $\mathcal{A} \setminus \mathcal{I}$.

b) Todo ideal de $\mathcal{A} \setminus \mathcal{I}$ tiene la forma $\mathcal{J} \setminus \mathcal{I}$ con $I \subseteq \mathcal{J}$, y $\mathcal{J}$ ideal de $\mathcal{A}$.

c) Si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$ y $\mathcal{J}$ ideal de $\mathcal{A}$, se cumple que $\mathcal{J}$ es un ideal propio si y solo si $\mathcal{J} \setminus \mathcal{I}$ es ideal propio de $\mathcal{A} \setminus \mathcal{I}$.

P2. Sea $\mathcal{A}$ una B-álgebra, $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \{\mathcal{M} :$ ideal maximal propio de $\mathcal{A}\}$ y $car(\mathcal{A}) = \{\mathcal{X} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ lineal multiplicativa, no nula $\}$ (este conjunto es llamado "caracteres del álgebra". Demuestre que:

a) $\forall \mathcal{M} \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, se tiene que $\mathcal{A} \setminus \mathcal{M} =_1 \mathbb{C}$.

b) Existe una biyección entre $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ y $car(\mathcal{A})$.

c) $car(\mathcal{A}) \subseteq S_{\mathcal{A}^*}$ es un conjunto w^*-compacto.

P3. Considere $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{C})$ con la norma usual y el producto $xy = (x_i y_i)_{i\in\mathbb{N}}$

a) Demuestre que es una álgebra de Banach sin unidad.

b) Demuestre que todos los caracteres son de la forma $f_n(x) = x_n$.

c) Concluya que existe una biyección entre $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ y $\mathbb{N}$.

P4. Considere $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$ con la norma usual y el producto $xy = (x_i y_i)_{i\in\mathbb{N}}$

a) Demuestre que es una álgebra de Banach con unidad.

b) Demuestre que si f es un carácter tal que $f(e_n) \neq 0$, entonces $f(x) = x_n$.

c) Demuestre que si $x \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R}) \Rightarrow inf_n x_n \leq f(x) \leq \sup_n x_n \; \forall f \in car(\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C}))$

d) Demuestre que N el conjunto de los caracteres tales que $f_n(x) = x_n$ es w^* denso en $car(\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C}))$, ¿en qué falla la demostración de la pregunta anterior?.

P5. De la pregunta anterior es bastante razonable preguntarse cuales caracteres cumplen que $f(x) \neq x_n$, para responder esto hay que introducir el siguiente concepto: Dado un ω ultrafiltro no trivial de $\mathbb{N}$ y (X, d) un espacio métrico, diremos que una sucesión x_n converge a $\overline{x}$ a través de ω, si y solo si $\forall \epsilon > 0 : \{n \in \mathbb{N} : d(x_n, \overline{x}) < \epsilon\} \in \omega$ (anotamos $\overline{x} = \omega - \text{lím}_n\, x_n$).

a) Demuestre que si existe el $\omega-$límite es único.

b) Demuestre que si (X, d) es compacto entonces toda sucesión tiene (un único) $\omega-$límite. Concluya que toda sucesión en $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ es $\omega-$convergente.

c) Demuestre que si $x_n \xrightarrow{d} \overline{x} \Rightarrow x_n \xrightarrow{\omega} \overline{x}$ y con ello demuestre que

$$\begin{aligned} f : \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x_n &\longmapsto f(x_n) = \omega - lim_n\, x_n \end{aligned}$$

es un carácter no trivial.