Profesor: Aris Daniilidis
Auxiliares: Bastián Espinoza, Juan Pedro Ross, Eduardo Silva
MA4801: Análisis Funcional

Auxiliar 11 - Espectro de operadores compactos

6 de Junio de 2018

P1 Consideremos $H = L^2([0,1];\mathbb{C})$ con el producto interno usual y $T : H \to H$ definida, para $f \in H$, por

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt \tag{1}$$

Pruebe que T es compacto y que $\sigma(T) = \{0\}$.

P2 Sea T el operador shift del auxiliar pasado (es decir, usamos $H = l^2(\mathbb{N};\mathbb{C})$ y $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$). Pruebe que $T \notin \overline{\text{inv}(H)}$.

P3 Sea H un Hilbert. Diremos que un operador lineal $T : H \to H$ es *normal* si T conmuta con su traspuesta, i.e. $T^*T = TT^*$. Sea T normal. Pruebe que $\ker T = \ker T^*$ y que $\sigma_{\text{res}}(T) = \emptyset$

P4 Sea X Banach, $T : X \to X$ compacto y $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Demuestre que $\dim\ker(T - \lambda I) = \dim\ker(T^* - \overline{\lambda}I)$.