**MA4702. Programación Lineal Mixta. 2018.**
**Profesor:** José Soto
**Escriba(s):** Pedro Pérez Escalona
**Fecha:** 30 de Julio del 2018.

# Cátedra 17

## 1. Descomposición de Dantzig-Wolfe

Anteriormente, se vió el la el problema de maximización desde el punto de vista de la dualidad lagrangiana (penalización con restricciones), que era el siguente problema

$$
\begin{array}{ll}
(P) & \max\ c^T x \quad = v_P \\
 & Dx \le d \ \ \text{(Linking)} \\
 & x^j \in X^j \ \ \forall j = 1 \dots k
\end{array}
$$

**Recuerdo**: D-W: $\underbrace{conv(X^j)}_{\text{si es poliedro}} = conv(V) + cono(R) \Rightarrow x_j = \sum_{p\in V} \lambda_p p + \sum_{r \in R} \mu_r r$

Y además cambia el problema a

$$
\begin{array}{ll}
(DW) & \max\ c^T x \\
 & Dx \le d \ \ \text{(Linking)} \\
 & x^j \in conv(X^j) \ \ \forall j = 1 \dots k
\end{array}
$$

**Alternativa**: Eliminar $Dx \le d$
Definimos el lagrangeano $L(x, y) = c^T x + y^t \underbrace{(d - Dx)}_{\substack{\ge 0 \text{ , si x} \\ \text{es factible}}}$

Para cada $y \ge 0$ ($y_i$ variable dual de $(Dx)_i \le d_i$), definimos:

$$
Lag(y) = \max_{x \in X} L(x, y) \qquad\qquad (X = \prod_{j=1}^{m} X_j)
$$

**Lema 1.** $\forall y \ge 0 \ \ v_p \le Lag(y)$

**Demostración**:

$$
Lag(y) = \max_{x\in X} L(x,y) = \max_{x\in X} c^T x + y^T (d - Dx) \ge \max_{\substack{x\in X \\ Dx \le d}} c^T x + \underbrace{y^T}_{\ge 0} \underbrace{(d - Dx)}_{\ge 0} \ge \max_{x \in X} c^T x = v_p
$$

**Definición 1** (Dual Lagrangiano (DLag))**.** $v_{DLag} = \min_{y \ge 0} Lag(y) = \min_{y\ge 0} \max_{x\in X} L(x, y)$

**Caso Particular**: $conv(X)$ es un poliedro no vacío. Esto es cuando:

- $X$ es finito
- $X$ es poliedro
- $X$ es conjunto lineal mixto a coeficientes racionales

$\Rightarrow conv(X) = conv(V) + cono(R)$, $V, R$ finitos.

**Teorema 1.** *i)* $Lag : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R} \cup \{\text{ínf}\}$, *es lineal por trozos y convexa.*
*ii)* $v_{DLag} = max\ c^T x$
$Dx \leq d$ *(Linking)*
$x \in conv(X)$

**Demostración**

*i)*

$$\begin{aligned} Lag(y) &= \max_{x\in X} L(x,y) = \max_{x\in X} c^T x + y^T(d - Dx) = \max_{x\in X}(c^T - y^T D)x + y^T d \\ &= \underbrace{\max_{x\in conv(X)}}_{\text{pues } conv(X)\neq\emptyset} (c^T - y^T D)x + y^T d \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \exists r \in \mathbb{R} \text{ tal que} (c^T - y^T D)r > 0 \\ \max\limits_{p\in V}(c^T - y^T D)p + y^T d & \text{si} \quad \sim \end{cases} \end{aligned}$$

Luego $Lag$ es finito en $Q = \{y \in \mathbb{R}^m_+ \ :\ (c^T - y^T D)r \leq 0 \ \ , \forall r \in \mathbb{R}\}$.
$Lag$ en Q es el máximo de un conjunto finito de funciones lineales en $y$.
Por lo tanto es lineal por trozos y convexo.■

*ii)*

$$v_{DLag} = \min_{y\geq 0} Lag(y) \overbrace{=}^{\substack{\text{si } Lag(y) \text{ no es} \\ \text{constantemente} +\infty}} \min_{y\in Q} \max_{p\in V} (c^T - y^T D)p + y^T d = \min_{y\in Q} \min \eta$$

, donde $\eta \geq (c^T - y^T D)p + y^T d \ \ \forall p \in V$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_{DLag} = \text{mín}\ \ &\eta \\ (c^T - y^T D)r &\leq 0 & \forall r \in R \ \ (y \in Q) \\ \eta &\geq (c^T - y^T D)p + y^T d & \forall p \in V \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \text{mín}\ \ &\eta \\ \eta + (Dp - d)^T y &\geq c^T D & \text{(induce } \lambda_p) \\ (Dr)^T y &\geq c^T r & \text{(induce } \mu_r) \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(Dual} \rightarrow) \ = \max \sum_{p\in V} \lambda_p(c^T p) + \sum_{r\in R} \mu_r(c^T r) & \\ \sum_{p\in V} \lambda_p &= 1 \\ \sum_{p\in V} \lambda_p(Dp - d) + \sum_{r\in R} \mu_r Dr &\leq 0 \\ \lambda, \mu &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \max c^T [\sum_{p\in V} \lambda_p p + \sum_{r\in R} \mu_r r] & \\ \sum_{p\in V} \lambda_p &= 1 \\ D[\sum_{p\in V} \lambda_p p + \sum_{r\in R} \mu_r r] &\leq \underbrace{\sum_{p\in V} \lambda_p}_{1} d \\ \lambda, \mu &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} = \max c^x & & \\ Dx & \leq & d \\ x^j & \in & conv(V) + cono(R). \blacksquare \end{array}$$

**Observación**: Si estamos resolviendo un PLM con $X = \{x \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \ : \ Ax \leq b\}$, cuya relajación es $R(X) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax \leq b\}$

$$\Rightarrow X \subseteq conv(X) \subseteq R(x).$$

Luego $v_p \leq v_{DLag} \leq v_{relajacion}$.

**Observación**: $\max c^t x$
$Ax \leq b$

$$v_{DLag} = \min_{y \geq 0} \max c^T x + y^T (b - Ax)$$

$$\left.\begin{array}{rrcl} = \min & y^T b & & \\ & Ay & = & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}\right\} \text{Dualidad lineal}$$

$$v_{DLag} = \min_{y \geq 0} Lag(y)$$

Si se extiende $Lag(y)$ a todo $\mathbb{R}^m$ con $Lag(y) = +\infty$ si $y \in \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{R}^m_+$ pasa a ser $v_{DLag} = \min\limits_{y \in \mathbb{R}^m} Lag(y)$, existen técnicas para resolver esto. Por ejemplo: Método del gradiente (sencillo pues $Lag(y)$ es lineal por trozos).

**Observación**: ¿Como calcular el Dual Lagragiano?

- $\begin{array}{rrcl} \max & c^T x & & \\ & D^+ x & \leq & d^+ \\ & D^- x & \geq & d^- \\ & D^= x & = & d^= \\ & x & \in & X \end{array} \rightarrow v_{DLag} = \min\limits_{\substack{y^+ \geq 0 \\ y^- \leq 0 \\ y^= \text{ libre}}} \max\limits_{x \in X} c^T x + y^T (d - Dx)$
- $\begin{array}{rrcl} \max & c^T x & & \\ & D^+ x & \geq & d^+ \\ & D^- x & \leq & d^- \\ & D^= x & = & d^= \\ & x & \in & X \end{array} \rightarrow v_{DLag} = \max\limits_{\substack{y^+ \geq 0 \\ y^- \leq 0 \\ y^= \text{ libre}}} \min\limits_{x \in X} c^T x + y^T (d - Dx)$

## 2. Cortes

**Contexto**: PLE $\max c^T x$
$Ax \leq b$
$x \in \mathbb{Z}^n$

**Definición 2** (Plano Cortante)**.** Un plano cortante es una desigualdad $c^T x \leq d$ válida para $P(A; b) \cap \mathbb{Z}^n$, pero no para $P(A; b)$.

## 2.1. Método genérico de planos cortantes

Para $A, b$ racionales
Repetir:

1. Resolver PL relajado. Si PL es no acotado o infactible terminar, pues PLE también lo es.
2. Sea $x^*$ óptimo del PL. Si $x^*$ integral, devolver $x^*$ como óptimo del PLE.
3. Generar plano cortante $\alpha^T x \leq \beta$, que deje afuera a $x^*$ y agregar $\alpha^T x \leq \beta$ a la descripción de $P(A;b)$.

**Observación**: Solvers utilizan Brunch & cut.

**Definición 3** (Corte de Chvátal)**.** Es cualquier desigualdad válida $\alpha^T x \leq \beta$, con $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, para $P(A;b)$, que genera un posible plano cortante.
Entonces el corte de Chvátal es de la forma $\alpha^T x \leq \lfloor \beta \rfloor$

**Lema 2.** *$\alpha^T x \leq \beta$ es desigualdad válida para $Ax \leq b \Leftrightarrow \exists \lambda \geq 0 \,:\, \underbrace{A^T \lambda}_{\substack{\text{combinación} \\ \text{de filas de } A}} = \alpha,\ b^T \lambda \leq \beta$.*