

MA4702. Programación Lineal Mixta. 2018.

Profesor: José Soto

Escriba(s): Pablo Araya.

Fecha: 13 de Julio 2018 .



## Cátedra 16

Al final de la clase pasada se vio el método de Generación de Columnas a través de la descomposición de Dantzig-Wolfe el cual se seguirá profundizando durante esta clase.

**Idea:**  $x^k \in \mathcal{X}^k \Rightarrow x^k = \sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p p$  donde  $\lambda$  cumple alguna convexidad.

Ejemplo:  $\lambda \geq 0$  o  $\sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p \delta_p = 1$ .

¿Como resolver PLs con **muchas** variables?

## 1. Generación de columnas

### 1.1. Recuerdo de Simplex

Simplex es un método para resolver problemas de la forma:  $\min c^T x : Ax = b, x \geq 0$ .

**Supuesto:** Tenemos solución inicial  $x^0$  básica factible.

1. **básica:**  $\exists B$  base de columnas de  $A$  (l.i.) tal que  $x^0 = (x_B^0, x_N^0)$  con  $x_N^0 = 0$ ,  $x_B^0 = A_B^{-1}b$ ,  $Ax^0 = A_B x_B + A_N x_N = b$ .
2. **factible:**  $x^0 \geq 0$ .

**Geométricamente:** La tarea es elegir un conjunto de columnas de  $A$  que sean l.i. (base) tal que se pueda encontrar una combinación lineal (cónica) de este conjunto de columnas que de  $b$ .

**Simplex:**

**Primal:**

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{s.a.} \quad & A_B x_B + A_N x_N = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

**Dual:**

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{s.a.} \quad & x_B = A_B^{-1}(b - A_N x_N) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & y^T b \\ \text{s.a.} \quad & A^T y \leq c \quad \begin{cases} A_B^T y \leq c_B \\ A_N^T y \leq c_N \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $x^0 = (x_B, 0)$  fuera óptimo, existiría dual  $y^0$  complementario (Holgura complementaria).

$x_B^0 \geq 0$ : si no hubiera degenerancia ( $x_B^0 = 0$  para alguna coordenada)  $\Rightarrow A_B^T y = c_B \Rightarrow y^0 = A_B^{-T} c_B$ .

Si  $A_B^{-T} c_B$  fuera dual factible  $\Rightarrow x^0$  sería óptimo. Es decir: Si **costo reducido**  $= c_N - A_N^T (A_B^{-T} c_B) > 0$ , entonces  $x^0$  sería óptimo.

Si **no**  $\exists j \in N$  tal que  $(c - A^T (A_B^{-T} c_B))_j < 0$ . En este caso simplex **ingresa**  $j$  a la base  $B$  ( $B \leftarrow B + j - i$ )

**Idea:**  $x^0$  se reemplaza por un vector  $\tilde{x}$  con  $\tilde{x}_j = \varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_B &= A_B^{-1}(b - A_N \varepsilon e_j) \\ &= A_B^{-1}b - \varepsilon A_B^{-1} A_N e_j \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

En el ultimo paso se uso que  $A_B^{-1}b > 0$  y que  $\varepsilon A_B^{-1}A_N e_j$  es un valor pequeño lo que implica  $A_B^{-1}b - \varepsilon A_B^{-1}A_N e_j \geq 0$ .

Al aumentar  $\varepsilon$ , algún  $i$  se hace 0, y la idea es eliminar  $i$  (se puede hacer de modo que  $B + j - i$  siga siendo base)

**Gracia:** Nueva solución  $\tilde{x}$  es factible y su costo es:  $c_B^T(A_B^{-1}(b - A_N \varepsilon e_j)) + c_N^T \varepsilon e_j$

## 1.2. Generación de columnas

En vez de tener una base  $B$  en cada momento, se tiene un conjunto  $Q \subseteq [n]$  de columnas que sabemos contiene una base  $B$  tal que  $x_B$  es básica factible.

**MP(Q) (Master Problem):**

$$\begin{aligned} \min \quad & c_Q^T x_Q \\ \text{s.a.} \quad & A_Q x_Q = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

**Dual:**

$$\begin{aligned} \max \quad & y^t b \\ \text{s.a.} \quad & (c - A^T y)_Q \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

**Algoritmo:** Partimos de  $Q^0$

- Paso  $j$ : Encontrar par primal-dual óptimo  $(x^j, y^j)$  de MP(Q).
  - Si  $(c - A^T y^0)_{[n] \setminus Q} \geq 0$ :
    - $x^j$  es óptimo para PL.
  - Si no: Encontrar  $k \in [n] \setminus Q$  tal que  $(c - A^T y^j)_k < 0$ . Usualmente se calcula:  $\min_{k \in [n]} (c - A^T y^j)_k = \eta$ 
    - Si  $\eta \geq 0$  ✓.
    - Si  $\eta < 0$ :  $Q^{j+1} \leftarrow Q^j + k$ .

**Observación 1.** Al problema de calcular  $\min_{k \in [n]} (c - A^T y^j)_k$  se le llama **Pricing Problem**.

**Observación 2.** Se puede obtener  $(x^{j+1}, y^{j+1})$  a partir de  $(x^j, y^j)$  con 1 iteración de simplex.

**Observación 3.** Generación de columnas no requiere conocer  $A$  (solo  $A_Q$ ) entera, basta ser capaz de resolver el Pricing Problem.

## 1.3. Ejemplo (Cutting Stock Problem):

**Problema:** Papelera tiene rollos de papel de ancho  $w$ . Pool de clientes que requieren  $b_j$  rollos de ancho  $w_j < w$ .

¿Como cortar el papel perdiendo lo menos posible? ¿Cuántos rollos originales necesito para satisfacer a los clientes?

**Formulación PL natural:** Usando variables  $z_j = \#$  de veces que el ancho  $j$  ( $w_j$ ) aparece en el  $i$ -ésimo rollo. Es malo (GAP de integralidad alto, PL  $<<$  PLE).

**Idea:** Configuración:  $p$  es un vector en  $\mathbb{Z}^m$  con  $p_j = \#$  de piezas de tamaño  $w_j$  tal que  $\sum_{j=1}^m p_j w_j < w$ .

Hay un numero finito de configuraciones (exponencial en  $m$ , máx  $b_j$ , máx  $w_j$ ).

Crear variable  $x_p = \#$  de rollos originales que se cortaran usando configuración  $p$ .

**Ejemplo:**  $w = 10, w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 4$  y  $p = (0 \ 0 \ 2)$ .

Consideremos  $\mathcal{P}$  como el conjunto de las configuraciones.

**PLE:**

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{p \in \mathcal{P}} x_p \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{p \in \mathcal{P}} x_p p_j \geq b_j \quad \forall j \\ & x_p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

¿Como resolver en RL (relajación lineal)?

**MP**( $Q^k$ )

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{p \in Q^k} x_p \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{p \in Q^k} x_p p_j \geq b_j \quad \forall j \\ & x_p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Con  $Q^0$ : Tomar configuración canónica  $p^j = e_j = (0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0)$ , 1 en la posición  $j$ .

**Dual:** **DMP**( $Q^k$ )

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^m y_j b_j \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^m y_j p_j \leq 1 \quad \forall p \in Q^k \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

¿Pricing Problem? Dado  $(x^k, y^k)$  óptimo para  $Q^k$ . Determinar:  $\eta = \max_{p \in \mathcal{P}} \sum_{j=1}^m y_j^k p_j \leq 1$

- Si  $\eta \leq 1 \Rightarrow x^k$  óptimo.
- Si  $\eta > 1 \Rightarrow$  Agregar:  $p \in \mathcal{P} \setminus Q^k$  que alcance el máximo como nueva columna.  $Q^{k+1} \leftarrow Q^k + p$ .

¿Como calcular  $\eta$ ?  $y^k$  dado

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^m y_j^k p_j \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^m w_j p_j \leq w \\ & p \in \mathbb{N}^m \end{aligned}$$

El problema anterior es el de la mochila:

- PLE muy rápido.
- Programación dinámica si los números son pequeños.