

MA4702. Programación Lineal Mixta. 2018.

Profesor: José Soto

Escriba(s): Alonso Letelier.

Fecha: 27 de Abril 2018.



Cátedra 11

Poliedros Integrales.

En esta cátedra se demostrarán las implicancias pendientes del teorema visto en la clase anterior, se verá una caracterización de los vértices de un tipo de poliedro en particular, para luego establecer criterios sobre las matrices que los definen que nos permitan determinar cuándo un poliedro es integral. Respecto a lo pendiente de la clase anterior, sólo queda demostrar la implicancia $2. \implies 1.$ del siguiente teorema:

Teorema 1. Sea P el poliedro definido por $P(A; b) \neq \emptyset$, racional y puntiagudo. Los siguientes son equivalentes:

1. P es integral. i.e. $P = \text{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$.
2. Cada cara de P tiene un punto integral.
3. $\forall c \in \mathbb{R}^n, (\max\{c^t x : x \in P\} < +\infty \implies \exists x^* \text{ óptimo integral})$.
4. $\forall c \in \mathbb{Z}^n, (\max\{c^t x : x \in P\} < +\infty \implies \exists x^* \text{ óptimo integral})$.
5. $\forall c \in \mathbb{Z}^n, \max\{c^t x : x \in P\} \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.

Observación: Siempre ocurre que $\text{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n) \subset P$.

Demostración: ($2. \implies 1.$) Como P es puntiagudo, por M-W para poliedros puntiagudos tenemos que:

$$P = \text{conv}(V(P)) + \text{cono}(R(P))$$

y por 2. tenemos que:

$$V(P) = V(P) \cap \mathbb{Z}^n$$

Luego,

$$\text{conv}(V(P)) = \text{conv}(V(P) \cap \mathbb{Z}^n) \subset \text{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$$

Y como P es poliedro racional, por Meyer tenemos que:

$$\text{rec}(\text{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)) = \text{rec}(P)$$

Por lo tanto,

$$P \subset \text{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n) + \text{rec}(\text{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)) = \text{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n) \square$$

Pregunta: ¿Cuándo un poliedro $P = P(A; b)$ es integral?. En otras palabras: si P tiene vértices $\bar{x}$, y sea $\bar{x}^*$ vértice que es solución única de un sistema $A' \bar{x}^* = b$, ¿cuándo ocurre que $A'^{-1} b' = \bar{x}^* \in \mathbb{Z}^n$?

Pregunta previa: Sea $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, ¿cuándo ocurre que $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$?

Para responder esta pregunta, recordemos el siguiente resultado de Álgebra Lineal:

Teorema 2. Sea $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, entonces:

$$A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n} \iff |\det(A)| = 1$$

Demostración: ($\implies$) Sea $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, entonces:

$$1 = \det(I) = \det(A)\det(A^{-1}) \implies \det(A) \in \mathbb{Z} \wedge \det(A^{-1}) \in \mathbb{Z} \implies |\det(A)| = 1$$

Donde la primera implicancia se tiene debido a que el determinante es suma y multiplicación de coeficientes en $\mathbb{Z}$.

($\impliedby$) Sea $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Recordemos el resultado de Cramer:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

donde $C^T = \text{adj}(A)$ y $C_{ij} = \det(A_{[n]-i, [n]-j})$ y como A está en $\mathbb{Z}^{n \times n}$ se deduce que $C_{ij} \in \mathbb{Z}, \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ y se concluye lo pedido.

Ejemplo: Veamos el caso cuando $P^=(A; b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$. $P^=$ es puntiagudo, pues podemos escribirlo de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} -A \\ A \\ -I \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y en este caso, notamos que $-I$ es una matriz de rango n y por lo tanto, $P^=$ tiene vértices.

Definición 1 (Base). Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \geq n$, entonces, un conjunto de índices $B \subset [n]$ tal que $A_{\bullet B}$ es invertible (m columnas l.i.) se dice *Base* de A .

Definición 2 (Solución Básica/ Solución Básica Factible). Se dice que $x \in \mathbb{R}^n$ es *solución básica* de $P^=$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $\text{rg}(A) = m$, si $x = (x_B, x_N)$ tal que $x_N = 0$ y $x_B = (A_{\bullet B})^{-1}b$. Si además $x \in P^=$, se dice que x es *solución básica factible* (*s.b.f.*).

Teorema 3. Las *s.b.f.* de $P^=(A; b)$ son exactamente sus vértices.

Demostración: ($\implies$) Sea $\bar{x}$ *s.b.f.* de $P^=$ y supongamos que $\exists y, z \in P^=$ tales que:

$$\bar{x} = \lambda y + (1 - \lambda)z, \quad \lambda \in [0, 1]$$

Luego, $\exists B$ base tal que $\bar{x} = (x_B, x_N) = ((A_{\bullet B})^{-1}b, 0) \implies 0 = \bar{x}_N = \lambda y_N + (1 - \lambda)z_N \implies y_N = z_N = \bar{x}_N = 0$. Ahora, sea $x \in P^=$ con $x_N = 0$ (recordar que y y z cumplen con esto), entonces:

$$b = Ax = A_{\bullet B}x_B + \underbrace{A_{\bullet N}x_N}_{=0} = A_{\bullet B}x_B$$

Como $A_{\bullet B}$ es invertible, entonces $x_B = (A_{\bullet B})^{-1}b$, y por lo tanto, como x arbitrario, $y_B = z_B = \bar{x}_B = (A_{\bullet B})^{-1}b$. Como $\bar{x} = y = z$, entonces, $\bar{x}$ es vértice por ser punto extremo.

($\impliedby$) Sea $\bar{x}$ punto extremo de $P^=$ y sea $I = \{i \in [n] : \bar{x}_i > 0\}$.

P.D.Q.: $A_{\bullet I}$ es una matriz con columnas l.i..

En efecto, sea $y_I \in \mathbb{R}^{|I|}$ tal que $A_{\bullet I}y_I = 0$. Notemos que lo anterior es una combinación lineal de columnas de $A_{\bullet I}$. Si $y_I \neq 0$, sea $y = (y_I, 0) \in \mathbb{R}^n$.

$$\implies Ay = \underbrace{A_{\bullet I}y_I}_{=0} + \underbrace{A_{\bullet [n] \setminus I}y_{[n] \setminus I}}_{=0} = 0$$

Recordemos que $A\bar{x} = b$, $\bar{x} \geq 0$ y $\bar{x}_I > 0$ y, por lo tanto, $\exists \epsilon > 0$ tal que:

$$A(\bar{x} \pm \epsilon y) = b, \quad \bar{x}_I \pm \epsilon y_I \geq 0 \quad \wedge \quad \bar{x}_{[n] \setminus I} \pm \epsilon y_{[n] \setminus I} = 0$$

$$\implies \frac{1}{2}(\bar{x} + \epsilon y) + \frac{1}{2}(\bar{x} - \epsilon y) = \bar{x}$$

Pero lo anterior es contradicción, dado que $\bar{x}$ es punto extremo. Por lo tanto, las columnas de $A_{\bullet I}$ son l.i..

Sea B una base al extender I con columnas en $[n] \setminus I$

$$\implies A_{\bullet B} \text{ es invertible. } \implies b = A\bar{x} = A_{\bullet B}\bar{x}_B + A_{\bullet N}\bar{x}_N \implies \bar{x}_B = (A_{\bullet B})^{-1}b, \quad \bar{x}_N = 0 \implies \bar{x} \text{ es s.b.f.}$$

Pregunta: Ahora podemos abarcar la pregunta planteada anteriormente para el caso que se ha estado estudiando, i.e, ¿cuándo $P^=(A, b) = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ es integral?

Definición 3 (Matriz Unimodular). Sea $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ con $m \leq n$. A se dice *unimodular* si para todas sus sub-matrices cuadradas maximales C , $\det(C) \in \{0, \pm 1\}$

Teorema 4. $P = P^=(A; b)$ es integral $\forall b \in \mathbb{Z}^n \iff A$ es unimodular.

Demostración: ($\Leftarrow$) Sea $b \in \mathbb{Z}^n$ Por **Teorema 1** y **Teorema 3** tenemos lo siguiente:

$$P \text{ es integral } \iff \text{ todas sus s.b.f. son integrales}$$

Sea B base, $A_{\bullet B}$ es invertible. Como $A_{\bullet B}$ es invertible y es cuadrada maximal de A , $|\det(A_{\bullet B})| = 1$ y luego, $(A_{\bullet B})^{-1} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Por lo tanto, $\bar{x} = (\bar{x}_{\bullet B}, \bar{x}_{\bullet N}) = ((A_{\bullet B})^{-1}b, 0) \in \mathbb{Z}^n$.

($\Rightarrow$) Sea $C = A_{\bullet B}$ sub-matriz cuadrada maximal de A .

- si B no es base $\implies \det(B) = 0$
- si B es base, entonces $\forall b \in \mathbb{Z}^m$, la s.b.f. $\bar{x} = (C^{-1}b, 0)$ asociada a B es integral.

$$\implies C^{-1} = [\underbrace{C^{-1}e_1}_{\in \mathbb{Z}^m} | \underbrace{C^{-1}e_2}_{\in \mathbb{Z}^m} | \dots | \underbrace{C^{-1}e_m}_{\in \mathbb{Z}^m}] \in \mathbb{Z}^{m \times m}$$

Con $e_i \in \mathbb{R}^m$ vector canónico con 1 en la i -ésima coordenada, $i \in \{1, \dots, m\}$. Por **Teorema 2** se concluye que $|\det(C)| = 1$.

Definición 4 (Matriz Totalmente Unimodular). $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es *totalmente unimodular* (T.U.) si todas sus sub-matrices cuadradas C satisfacen $\det(C) \in \{0, \pm 1\}$.

Ejercicio: Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- A es T.U. $\iff A^T$ es T.U.
- A es T.U. $\iff (A | I_m)$ es unimodular.

Teorema 5 (Hoffman - Kruskal). Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

1. $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ es integral $\forall b \in \mathbb{Z}^m \iff A$ es T.U.
2. $P(A; b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ es integral $\forall b \in \mathbb{Z}^m \iff A$ es T.U.

Ejemplo: Sea $G = (V, E)$ grafo bipartito completo, sea $c \in \mathbb{R}^E$, definimos el problema de matching fraccionario de peso máximo como sigue:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^E} \{c^T x : \forall v \in V, x(\delta(v)) \leq 1, x \geq 0\}$$

Queremos llegar a la forma:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^E} \{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

¿Cómo se ve la matriz de incidencia A en este caso?

$$A = \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \begin{array}{c} e=(u,v) \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Sus filas (nodos de G) se dividen en dos partes, L y R, i. e., $V(G) = L \dot{\cup} R$ donde $u \in L$ y $v \in R$. Esto nos entrega una matriz donde en cada columna hay un 1 en L, un 1 en R, y el resto son 0's. Veamos que A es tiene esta forma.

Demostración: Supongamos que no. Sea C sub-matriz cuadrada de $|det(C)| \geq 2$, con C minimal. Si alguna columna tiene sólo 0's, $det(C) = 0$. Si alguna columna tiene sólo un 1, entonces $\exists D$ submatriz tal que $det(C) = det(D)$.

$\implies$ Todas las columnas tienen un 1 en L y un 1 en R. Por lo tanto, existe combinación lineal no nula de filas que es 0.

$\implies det(C) = 0$.