MA4702. Programación Lineal Mixta. 2018.
Profesor: José Soto.
Escriba(s): Fernando García D.
Fecha: 4 de Mayo 2018.

Cátedra 12

1. Total Unimodularidad

En esta cátedra se ve un teorema clásico de poliedros descritos con matrices totalmente unimodulares y se enuncian varios ejemplos y aplicaciones, además de estudiar problemas clásicos de la programación lineal mixta dentro del contexto de la total unimodularidad. Primero un pequeño recuerdo de la clase anterior.

1.1. Recuerdo

Sea $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, entonces:

- A es *unimodular* $\iff \forall\, B$ submatriz cuadrada *maximal* de A, $\det(B) \in \{\pm 1, 0\}$.
- A es *total unimodular* $\iff \forall\, B$ submatriz cuadrada de A, $\det(B) \in \{\pm 1, 0\}$.
- Si $C \in \mathbb{Z}^{m\times m}$, entonces $|\det(C)| = 1 \iff C^{-1} \in \mathbb{Z}^{m\times m}$.
- A es *unimodular* $\iff P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\,,\ x \geq 0\}$ es integral $\forall\, b \in \mathbb{Z}^m$.
- A es *total unimodular* $\iff [A \mid I\,]$ es *unimodular*.

1.2. Teoremas

Teorema 1. ***Hoffman-Kruskal***

- *A es <u>total unimodular</u> $\iff P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\,, x \geq 0\}$ es integral $\forall\, b \in \mathbb{Z}^m$.*
- *A es <u>total unimodular</u> $\implies P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ es integral $\forall\, b \in \mathbb{Z}^m$.*

Demostración:

1. Agregando holguras, tenemos que $P = \text{proy}_x(Q)$ con $Q = \{(x, s) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid [A \mid I\,]\left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix}\right) = b\,,\ (x, s) \geq 0\}$.
A *T.U.* $\iff [A \mid I\,]$ es *unimodular* $\iff Q$ es integral $\forall\, b \in \mathbb{Z}^m$. Veamos que esto equivale a P integral $\forall\, b \in \mathbb{Z}^m$. Basta notar que (x, s) es vértice de $Q \implies x$ es vértice de P. Y si x es vértice de $P \implies (x, b - Ax)$ es vértice de Q. Por tanto, que los vértices de P sean integrales equivale a que los vértices de Q sean integrales. Como los dos poliedros tienen punta, se concluye.

2. Sea $P = P(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \leftarrow$ no necesariamente puntiagudo.
Sea F cara minimal de P, entonces:
$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_I x = b_I\}$ para $I \subseteq [m]$ (notar que no se pide $x \in P$ ya que F es cara minimal). A_I no es necesariamente cuadrada pero $\text{rang}(A_I) = \text{rang}(A)$. Por lo tanto $\exists K \subseteq [n]$ tal que $A_{I,K}$ es cuadrada e invertible. Eligiendo $\hat{x} = (\hat{x}_K, \hat{x}_{[n]\setminus K})$ con $\hat{x}_K = (A_{I,K}^{-1})b_I$ y $\hat{x}_{[n]\setminus K} = 0$, se tiene que:
$$A\hat{x} = (A_{I,K})(A_{I,K}^{-1})b_I + (A_{I,[n]\setminus K})0 = b_I.$$
Por lo tanto $\hat{x} \in F$ y $\hat{x}$ es integral pues $A_{I,K}$ es submatriz cuadrada de una matriz *total unimodular* $\implies (A_{I,K}^{-1})$ es entera $\implies$ toda cara minimal tiene un punto integral. $\square$

Corolario 1. *A total unimodular $\Longrightarrow P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b \ , \ l \leq x \leq u\}$ es integral $\forall \, b, l, u$ integrales $u, l \in \{\mathbb{Z}, \pm\infty\}$.*

Teorema 2. ***Ghouila-Houri***

A es total unimodular $\iff \forall \, J \subseteq [n] \ \exists \, J^+, J^-$ tal que: $J = J^+ \cup J^-$, $J^+ \cap J^- = \emptyset$ y

$$\sum_{j \in J^+} aij - \sum_{j \in J^-} aij \ \in \ \{0, \pm 1\} \quad \forall i \in [m].$$

El teorema es equivalente tomando subconjuntos de filas, ya que: A es total unimodular $\iff A^T$ también lo es.

Demostración:

Visto en auxiliar 7.

1.3. Ejemplos

1. A es la matriz de incidencia de un grafo $G = (R, L, E)$ bipartito.

$$A = \begin{array}{cc} & e \\ \begin{array}{c} \\ R \\ \\ \\ \\ L \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} & 0 & & \\ & 1 & & \\ & 0 & & \\ - & \vdots & - & - \\ & 0 & & \\ & 1 & & \\ & 0 & & \end{array}\right] \end{array}$$

Tomando $J^+ = R \cap J$ y $J^- = L \cap J$ notamos que en cada columna hay un 1 en R y un 1 en L por tanto se tiene *Ghouila-Houri* en filas.

2. A es una matriz de inciencia de un *digrafo*.

$$A = \begin{array}{cc} & e=(a,b) \\ \begin{array}{c} \\ a \\ \\ \\ \\ b \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Dado un J podemos tomar $J^+ = J$, $J^- = \emptyset$ dado que en una columna en A_J puede haber:

- un +1 y un -1 y el resto ceros.
- un +1 y el resto ceros.
- un -1 y el resto ceros.
- solo ceros.

En todos estos casos se cumple *Ghouila-Houri* en filas.

3. La matriz A tiene la propiedad de 1's consecutivos.

$$A_J = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + & - & + & - & + \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} & & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Tomando J^+ las columnas impares y J^- los pares, se cumple *Ghouila-Houri* ya que siempre va a haber a lo mas un 1 de diferencia entre J^+ y J^-.

1.4. Consecuencias

Sea G grafo bipartito, se definen:

- $P_M(G) = conv(\{\chi^M \in \mathbb{R}^E \mid M \text{ es matching de G}\})$.
- $P_{PM}(G) = conv(\{\chi^{PM} \in \mathbb{R}^E \mid PM \text{ es matching perfecto de G}\})$.
- $P_{VC}(G) = conv(\{\chi^S \in \mathbb{R}^V \mid S \text{ es matching de G}\})$.

Entonces:

1. $P_M(G) = P_1 := \{x \in \mathbb{R}^E \mid x(\delta(v)) \leq 1 \ \forall\, v \in V \ , \ x \geq 0\}$.
2. $P_{PM}(G) = P_2 := \{x \in \mathbb{R}^E \mid x(\delta(v)) = 1 \ \forall\, v \in V \ , \ x \geq 0\}$.
3. $P_{VC}(G) = P_3 := \{y \in \mathbb{R}^V \mid y_u + y_v \geq 1 \ \forall uv \in E \ , \ 0 \leq y \leq 1\}$

Demostración: La demostración es idéntica en los 3 casos, veremos el de $P_M = P_1$.

($\subseteq$) Sea $\chi^M \in P_M$ se tiene por definición que $\chi^M \in P_1$, como P_1 es convexo $P_M \subseteq P_1$.

($\supseteq$) Notemos que cada punto integral de P_1 es indicatriz de matching de G. Entonces si P_1 fuera integral, $V(P_1) \subseteq \{\chi^M \in \mathbb{R}^E \mid M \text{ es matching de G}\} \subseteq P_M$ y tomando envoltura convexa se concluye, dado que P_M es convexo.
Veamos ahora que P_1 es integral.
$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^E \mid Mx \leq \mathbb{1} \ , \ x \geq 0\}$ con M la matriz de incidencia de G. Dado que $\mathbb{1}$ es integral y M es una matriz *total unimodular* entonces P_1 es integral y se concluye la demostración. □

Corolario 2. *Los siguientes problemas pueden ser resueltos como problemas lineales:*

1. *Matching de peso máximo/mínimo.*
2. *Matching perfecto de peso máximo/mínimo.*
3. *Vertex cover de peso máximo/mínimo.*

Definición 1. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es *doblemente estocástica* si:

$$\sum_{i\in[n]} a_{i,j} = \sum_{j\in[n]} a_{i,j} = 1$$

Definición 2. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es de *permutación* si tiene solo un 1 por fila y un 1 por columna, siendo el resto de los elementos ceros.

Teorema 3. ***Birkhof***

Toda matriz doblemente estocástica es combinación convexa de matrices de permutación.

Demostración: A doblemente estocástica $\iff$

$$A \in P_{PM}(K_{n,n}) = \Big\{x \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \sum_{i\in[n]} a_{i,j} = \sum_{j\in[n]} a_{i,j} = 1\ ,\ x \geq 0\Big\}$$

$\implies A \in conv(\{\chi^{PM} \in \mathbb{R}^E \mid PM \text{ es matching perfecto de } K_{n,n}\})$.
Y los χ^{PM} con PM matching perfecto de $K_{n,n}$ son matrices de permutación. $\square$

Teorema 4. ***König***

Sea G un grafo bipartito, entonces:

$$\text{máx}\{|M| : M \text{ matching de } G\ \} = \text{mín}\{|C| : C \text{ vertex cover de } G\}$$

Demostración: Tenemos que,

$$\text{máx}\{|M| : M \text{ matching de } G\ \} = \text{máx}\{\mathbb{1}^T x \mid x \in P_M(G)\} = \text{máx}\{\mathbb{1}^T x \mid x \in \mathbb{R}^E\ ,\ x(\delta(v)) \geq 1\ \forall\, v \in V\ ,\ x \geq 0\}.$$

Tomando dual uno llega a que lo anterior es igual a:

$$\text{mín}\{\mathbb{1}^T y \mid y \in \mathbb{R}^V\ ,\ y_u + y_v \geq 1\ \forall\, uv \in E\ ,\ y \geq 0\}.$$

Como estamos minimizando, podemos pedir que $y \leq 1$ sin cambiar el óptimo, ya que si existe $y_u > 1$ cambiándolo por $y_u = 1$ no cambiamos la factibilidad y estamos mejorando la función objetivo. Llegamos a:

$$\text{mín}\{\mathbb{1}^T y \mid y \in \mathbb{R}^V\ ,\ y_u + y_v \geq 1\ \forall\, uv \in E\ ,\ 1 \geq y \geq 0\} = \text{mín}\{\mathbb{1}^T y \mid y \in P_{VC}(G)\} = \text{mín}\{|C| \colon C \text{ vertex cover de } G\}. \quad \square$$

Volviendo a los ejemplos, el siguiente problema cae en el mismo contexto. Sea una familia Γ de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ y $\omega : \Gamma \to \mathbb{R}_+$ una función de peso. Se necesita encontrar el conjunto de intervalos *estable* (intervalos disjuntos) de peso máximo. Formulaciones:

$$\text{máx}\Big\{\sum_{I\in\Gamma} \omega_I x_I \mid x \in \{0,1\}^\Gamma,\ \ x_I + x_{I'} \leq 1\ \forall\, I \cap I' \neq \emptyset\Big\}.$$

$$\iff$$

$$\text{máx}\Big\{\sum_{I\in\Gamma} \omega_I x_I \mid x \in \{0,1\}^\Gamma,\ \ \sum_{p\in I} x_I \leq 1\ \forall\, p \in \text{ext}(\Gamma)\Big\}.$$

Con $\text{ext}(\Gamma)$ los puntos extremos de los intervalos en Γ, ordenados con el orden natural de $\mathbb{R}$.
Matriz del problema:

$$\begin{array}{cc} & \Gamma \\ \text{ext}(\Gamma) & \begin{bmatrix} 0 & \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \\ 0 & \\ 0 & \end{bmatrix} \end{array}$$

Cumple con la propiedad de 1's consecutivos por columnas, por tanto el problema es equivalente a:

$$\text{máx}\Big\{\sum_{I\in\Gamma} \omega_I x_I \mid x \in \mathbb{R}^\Gamma,\ \ \sum_{p\in I} x_I \leq 1\ \forall\, p \in \text{ext}(\Gamma)\ ,\ x \geq 0\Big\}.$$

Ejercicio: Calcular el problema dual.