MA4702. Programación Lineal Mixta. 2018.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Ricardo Arancibia
Fecha: 03 de Agosto 2018 .

Cátedra 18

1. Cortes de Chvátal para PLE

Recuerdo:

Área factible: Para PLE: $P \cap \mathbb{Z}^n$.

Un **Corte de Chvátal** es una desigualdad $\alpha^T x \leq \lfloor \beta \rfloor$ válida para $P \cap \mathbb{Z}^n$ con $\alpha^T x \leq \beta$ desigualdad válida para P y $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ integral.

Lema 1. *Sea* $P = P(A; b)$.

$\alpha^T x \leq \beta$ *válida para* $P \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \geq 0$ *tal que* $\lambda^T A = \alpha^T$ *y* $\lambda^T b \leq \beta$

Demostración:

$$\begin{aligned} \alpha^T x \leq \beta \text{ válida} &\iff \text{máx}\{\alpha^T x : Ax \leq b\} \leq \beta \\ &\iff \text{mín}\{b^T \lambda : A^T \lambda = \alpha, \lambda \geq 0\} \leq \beta \\ &\iff \exists \lambda \geq 0, A^T \lambda = \alpha, b^T \lambda \leq \beta \end{aligned}$$

Observación: $\alpha^T x \leq \beta$ válida se obtiene como combinación cónica de desigualdades de $Ax \leq b$.

Ejemplo:

Sea $G = (V, E)$ grafo.

$P = \{x \in \mathbb{R}^n : x(\delta(v)) \leq 1 \, \forall v \in V, x \geq 0\}$

Se demostró que P es integral si el grafo es bipartito.

Así, si G es bipartito, tendremos que $P \cap \mathbb{Z}^n = \{\chi^M : M \text{matching}\}$

Si no,

Edmonds: $conv(P \cap Z^n) = \{x \in P : x(E(S)) \leq \lfloor \frac{|S|}{2} \rfloor \, \forall S \subseteq V\}$

Sea $S \subseteq V$.

$$\begin{aligned} x(\delta(v)) \leq 1 \quad \forall v \in V(S) \qquad (1) \\ -x_e \leq 0 \quad \forall e \in S \end{aligned}$$

Sumando en (1)

$$|S| \geq \sum_{v \in S} x(\delta(v)) = 2x(E(S)) + x(\delta(S))$$

Así, tendremos que

$$
\begin{aligned}
x(E(S)) &\leq \frac{|S|}{2} - x(\delta(S)) \\
&\leq \frac{|S|}{2}
\end{aligned}
$$

Notando que

$$
x(E(S)) = \sum_{e \in E(S)} x_e = 1 \cdot x
$$

podemos deducir que

$$
x(E(S)) \leq \left\lfloor \frac{|S|}{2} \right\rfloor
$$

es un corte de Chvátal.

Definición 1 (Cerradura de Chvátal para poliedro P)**.** P^{Ch} es el conjunto obtenido al agregar a P todos los cortes de Chvátal.

Teorema 1. *Si P es un poliedro racional, entonces P^{Ch} es un poliedro racional y el número de Cortes de Chvátal necesarios para definir P^{Ch} es finito.*

Demostración:

Si P es racional, spg $P = \{x : Ax \leq b\}$ con A y b integrales.

$$
\begin{aligned}
P^{Ch} &= \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha^T x \leq \lfloor \beta \rfloor \text{ con } (\alpha, \beta) \text{ tq } \alpha \text{ integral y } \alpha^T x \leq \beta \text{ válida } \} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda^T A x \leq \lfloor \lambda^T b \rfloor \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}^m_+, \lambda^T A \text{ integral } \}
\end{aligned}
$$

Proposición 1. $P^{Ch} = P' := \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda^T A x \leq \lfloor \lambda^T b \rfloor$ *con* $\lambda^T A$ *integral* $, \lambda \in [0,1]^m\}$

Demostración:

$\subseteq$: $P^{Ch} \subseteq P'$ es directo.

$\supseteq$: Sea $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$, con $\lambda^T A$ integral. Se define $\lambda' = \lambda - \lfloor \lambda \rfloor$.

$$
\begin{aligned}
P' &\subseteq P \cap \{x : \lambda'^T A x \leq \lfloor \lambda'^T b \rfloor\} \\
&= P \cap \{x : \lambda'^T A x \leq \lfloor \lambda'^T b \rfloor, \lfloor \lambda \rfloor^T A x \leq \lfloor \lambda \rfloor^T b\} \\
&\subseteq P \cap \{x : \lambda^T A x \leq \lfloor \lambda'^T b \rfloor + \lfloor \lambda \rfloor^T b)\}
\end{aligned}
$$

Luego, utilizando que b es integral, tendremos que $\lfloor \lambda'^T b \rfloor + \lfloor \lambda \rfloor^T b = \lfloor (\lambda' + \lfloor \lambda \rfloor)^T b \rfloor = \lfloor \lambda^T b \rfloor$.

Por lo tanto,

$$
P' \subseteq P \cap \{x : \lambda^T A x \leq \lfloor \lambda^T b \rfloor \, \lambda \in \mathbb{R}^m_+, \, \lambda^T A \text{ integral } \}
$$

Se concluye que $P' \subseteq P^{Ch}$. $\square$

Para terminar la demostración, notamos que $\{\lambda \in \mathbb{R}^m_+ : \lambda \in [0,1]^m\}$ es un conjunto acotado. Luego, el conjunto $\{\lambda^T A : \lambda \in [0,1]^m, \lambda^T A \text{ integral}\}$ es finito.

Así, P^{Ch} se obtiene usando un conjunto finito de cortes (todos racionales).

Ejemplo:

$$P = \{x : x(\delta(v)) \leq 1, v \in V, x \geq 0\}$$
$$P^{Ch} = P_{match} = conv\{\chi^M : M \text{ matching }\}$$

Problema: No siempre es suficiente agregar los cortes de Chvátal a P para obtener $conv(P \cap \mathbb{Z}^n)$. Es decir, no siempre es cierto que $P^{Ch} = conv(P \cap \mathbb{Z}^n)$

Más aún, si $S = P \cap \mathbb{Z}^n$, entonces existen desigualdades válidas para S que no son cortes de Chvátal.

Ejemplo:

Consideremos $G = (V, E)$ grafo. Los conjuntos estables de G son

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : x_u + x_v \leq 1, \quad \forall e = uv \in E\}$$

Una formulación posible para el máximo conjunto estable es:

$$\max \sum_{\substack{v \in V \\ x \in P \cap \mathbb{Z}^n}} x_v$$

Sea G el complemento de C^7. La desigualldad $1^T x \leq 2$ es válida en $P \cap \mathbb{Z}^n$, pero no es corte de Chvátal (ni múltiplo). Esto pues, todo trío de vértices en V debe contener aristas. Para ver que no es corte de Chvátal:

$$1^T x = \lambda \alpha^T x \leq \lambda \lfloor \beta \rfloor = 2$$

con α integral, $\lambda \geq 0$, $\alpha^T x \leq \beta$ válido en P.

Pero el vector $x^* = \frac{1}{2}$ es factible en P. Luego, $\beta \geq \alpha^T x^* = \frac{1^T x^*}{\lambda} = \frac{7}{2\lambda}$

Pero,

$$\begin{aligned}
2 = \lfloor \beta \rfloor \lambda &\geq \left\lfloor \frac{7}{2\lambda} \right\rfloor \cdot \lambda = \frac{7}{2} - \lambda \\
&\Rightarrow \lambda \geq \frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2} \\
&\Rightarrow \frac{1}{\lambda} \leq \frac{2}{3} \qquad \text{(no puede ser entero)}
\end{aligned}$$

2. Certificados de Chvátal

Sea $\alpha^T \leq \beta$ con α, β integrales.

Un certificado de Chvátal es una sucesión de desigualdades $\alpha_1^T x \leq \lfloor \beta_1 \rfloor$, $\alpha_2^T x \leq \lfloor \beta_2 \rfloor$, ... , $\alpha_k^T x \leq \lfloor \beta_k \rfloor$ tal que

1. α_1,..., α_k integrales.
2. $\alpha_k = \alpha$, $\lfloor \beta_k \rfloor = \beta$
3. $\forall i = 1, \ldots, k$: $\alpha_k^T x \leq \lfloor \beta_k \rfloor$ se puede obtener como combinación cónica de desigualdades en $\{Ax \leq b, \alpha_1^T x \leq \lfloor \beta_1 \rfloor$, $\alpha_2^T x \leq \lfloor \beta_2 \rfloor$, ... , $\alpha_k^T x \leq \lfloor \beta_k \rfloor\}$

Una **certificado de Chvátal** para $\alpha^T x \leq \beta$ garantiza que $\alpha^T x \leq \beta$ es válida para $P \cap \mathbb{Z}^n$.

Equivalentemente, si se define $P^{(0)} := P$ y $P^{(i)} = (P^{(i-1)})^{Ch}$, tendremos que $P^{(0)} \supseteq P^{(1)} \supseteq ... \supseteq conv(P \cap \mathbb{Z}^n)$

Lema 2. *Sea F cara de P poliedro racional. Entonces $F^{(1)} = P^{(1)} \cap F$*

Corolario 1. $\forall k \geq 0$ *:* $F^{(k)} = P^{(k)} \cap F$

demostración:

Por inducción que si $F = P \cap H$, con H hiperplano, entonces $F^{(k)} = P^{(k)} \cap H$.

Caso base: directo.

Paso inductivo: suponemos que $\forall l < k$ se tiene la propiedad.

$$\begin{aligned} F^{(k)} = (F^{(k-1)})^{Ch} &= (P^{(k-1)})^{Ch} \cap F^{(k-1)} \\ &= P^{(k-1)} \cap (P^{(k-1)} \cap H) \\ &= P^{(k)} \cap H \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es por el paso inductivo y porque $F^{(k-1)}$ es cara de $P^{(k-1)}$.

Teorema 2. *Si $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ polítopo racional tal que $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$. Entonces $\exists$ certificado de Chvátal para la desigualdad $0^T x \leq -1$ (Equivalentemente $\exists k$ tal que $P^{(k)} = \emptyset$).*

Demostración:

Inducción en $dim(P)$.

Si $dim(P) = -1$, entonces $P = \emptyset$ (Farkas). Si $dim(P) = 0$, entonces $P = \{a\}$ (propuesto).

Supongamos que $dim(P) \geq 1$. Sea F cara propia de P. Entonces

$F = \{x : Ax \leq b, \alpha^T x = \beta\}$, con $\alpha^T x \leq \beta$ válida para P.

Como P es racional, α, β son integrales.

Sea $z^* = \text{mín}\{\alpha^T x : x \in P\}$

- Si $\exists q \in \mathbb{Z}$ con $q < z^*$ tal que $\alpha^T x \leq q$ admite certificado de Chvátal, entonces $\exists k$ tal que $P^{(k)} = \emptyset$.
- En otro caso, tomemos el mínimo q ($q \geq z^*$) tal que $\alpha^T x \leq q$ admite certificado de Chvátal.

Entonces $\exists k \in \mathbb{N} : P^{(k)} \neq \emptyset$ y $P^{(k)} \subseteq P \cap \{\alpha^T x \leq q\}$.

Sea $Q = \{x \in P^{(k)} : \alpha^T x = q\}$. Como $\alpha^T x = \beta$ definía cara propia de P, Q es cara propia de $P^{(k)}$.

$$\begin{aligned} \therefore \qquad \emptyset = Q^{(l)} &= (P^{(k)})^l \cap Q \\ &= P^{(k+l)} \cap \{\alpha^T x = q\} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad P^{(k+l)} \subseteq \{x : \alpha^T x < q\}$$

Entonces se concluye que $\alpha^T x \leq q - 1$ es corte de Chvátal para $P^{(k+l)}$

$\therefore$, contradice la elección de q $\square$