

MA4702. Programación Lineal Mixta. 2018.**Profesor:** José Soto**Escriba(s):** Matías Altamirano.**Fecha:** 23 de Abril 2018 .

Cátedra 10

1. Teorema Fundamental de la PLM (Meyer)

Teorema 1. Sea (M) un PLM

$$\max\{c^T x : x \in S\}$$

donde $S = P \cap \mathbb{Z}^E \cap \mathbb{R}^C$, $P = P(A; b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.Si A, b racionales $\implies \text{conv}(S)$ es un poliedro racional.

Más Aún:

1. $\text{rec}(\text{Conv}(S)) = \text{rec}(P)$.
2. Existe un conjunto finito de polítopos racionales $P^1, \dots, P^M$ y un conjunto finito de rayos integrales R , tal que $\text{rec}(P) = \text{cono}(R)$ y:

$$S = \bigcup_{i=1}^M P^i + \text{cono}_{\mathbb{Z}}(R), \quad \text{conv}(S) = \text{conv}\left(\bigcup_{i=1}^M V(P^i) + \text{cono}_{\mathbb{Z}}(R)\right).$$

Demostración: Por MW tenemos que: $P = \text{conv}(X) + \text{cono}(R)$. Más aún, como P es racional: $X = \{q^1, \dots, q^s\} \subseteq \mathbb{Q}^n$ y $R = \{r^1, \dots, r^t\} \subseteq \mathbb{Z}^n$. Luego,

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^s \lambda_i q^i + \sum_{j=1}^t \mu_j r^j \mid \lambda \in \mathbb{R}^s, 1^T \lambda = 1, \mu \in \mathbb{R}_+^t \right\}, \quad S = P \cap \mathbb{Z}^E \cap \mathbb{R}^C$$

Se define:

$$P' = \left\{ \sum_{i=1}^s \lambda_i q^i + \sum_{j=1}^t \mu_j r^j \mid \lambda \in \mathbb{R}^s, 1^T \lambda = 1, \mu \in [0, 1)^t \right\}, \quad S' = P' \cap \mathbb{Z}^E \cap \mathbb{R}^C$$

Sea $C = \text{cono}_{\mathbb{Z}}(R) = \left\{ \sum_{j=1}^t \mu_j r^j \mid \mu \in \mathbb{N} \right\}$. Veamos ahora que $P = P' + C$: $(\subseteq)$ Obvio. $(\supseteq)$ Sea $x \in P$, luego tenemos que:

$$x = \sum_{i=1}^s \lambda_i q^i + \sum_{j=1}^t \mu_j r^j = \sum_{i=1}^s \lambda_i q^i + \sum_{j=1}^t (\mu_j - \lfloor \mu_j \rfloor) r^j + \sum_{j=1}^t \lfloor \mu_j \rfloor r^j$$

Notamos que $\sum_{i=1}^s \lambda_i q^i + \sum_{j=1}^t (\mu_j - \lfloor \mu_j \rfloor) r^j \in P'$ y que $\sum_{j=1}^t \lfloor \mu_j \rfloor r^j \in C$.Luego tenemos que $x \in P' + C$.De forma similar mostramos que $S = S' + C$ **Observación:** P' acotado $\implies$ polítopo racional.

$$(Y^1, Y^2) \in P' \text{ con } Y^1 \in E, Y^2 \in C, \quad |\text{proy}_{Y^1} P' \cap \mathbb{Z}^E| \text{ es finito.}$$

Si definimos $\psi = \text{proy}_{Y^1} P' \cap \mathbb{Z}^E$, tenemos que:

$$S' = \bigcup_{Y^1 \in \psi} \{Y^1\} \times Q^{Y^1} = \bigcup_{i=1}^M P^i$$

Donde los P^i son polítopos racionales.

Con lo que tenemos que:

$$S = \bigcup_{i=1}^M P^i + C; \quad \text{conv}(S) = \text{conv}\left(\bigcup_{i=1}^M P^i\right) + \text{conv}(C) = \text{conv}\left(\bigcup_{i=1}^M V(P^i)\right) + \text{conv}(R)$$

Observación: $\hat{P} = \text{conv}(\hat{X}) + \text{cono}(\hat{R}) \implies \text{cono}(\hat{R}) = \text{rec}(\hat{P})$ Por lo tanto: $\text{cono}(R) = \text{rec}(\text{conv}(S))$

Corolario 1. Si $E = [n]$ (El PLM es un PLE).

El resultado anterior se simplifica a:

$$S = P \cap \mathbb{Z}^n$$

$$S = X + \text{cono}_{\mathbb{Z}}(R)$$

donde X es un conjunto finito.

En palabras: existe un conjunto finito de puntos integrales X y un conjunto finito de rayos integrales R tal que:

$$S = X + \text{cono}_{\mathbb{Z}}(R)$$

$$\text{conv}(S) = \text{conv}(X) + \text{cono}(R)$$

Corolario 2. Se deja propuesto probar que si solo A es racional igual se tiene que $\text{rec}(\text{conv}(S)) = \text{rec}(P)$

Teorema 2. Sea $P = P(A; b)$, A , b racional. $S = P \cap \mathbb{Z}^E \cap \mathbb{R}^C$ y definmanos:

- $z^{PLM} = \max\{c^T x | x \in S\}$
- $z^{PLR} = \max\{c^T x | x \in P\}$
- $z^{PL*} = \max\{c^T x | x \in \text{conv}(S)\}$

Entonces:

$$1. S \subseteq \text{conv}(S) \subseteq P$$

$$2. z^{PLM} = z^{PL*} \leq z^{PLR}$$

$$\text{Más aún, si PLM es factible} \implies [z^{PLR} = +\infty \implies z^{PLM} = z^{PL*} = z^{PLR} = +\infty]$$

Demostración:

1. Obvio

2. Probemos la segunda parte:

Si tenemos que:

$$z^{PLR} = +\infty \iff \exists \text{ rayo } r \in \text{rec}(P) : c^T r > 0$$

Pero $\text{rec}(P) = \text{cono}(R)$.

Luego obtenemos:

$$r = \sum_{i=1}^t \lambda_i r_i, \quad R = \{r^i\}_{i=1}^t \implies r^i \in R : c^T r^i > 0$$

Como PLM factible,

$$\exists x^0 \in S$$

Para $N \in \mathbb{N} : x^0 + N r^i \in S$ y además $c^T(x^0 + N r^i) \rightarrow +\infty$ cuando $N \rightarrow +\infty$

Además si:

$$z^{PLM} = -\infty \implies S = \emptyset \implies \text{conv}(S) = \emptyset \implies z^{PL*} = -\infty$$

Solo falta ver: $-\infty < z^{PLM} = z^{PL*} < +\infty$

Sea $x^* \in \text{conv}(S)$, óptimo para PL^* .

Como $c^T r \leq 0, \forall r \in \text{rec}(P)$ podemos suponer que:

$$x^* \in \text{conv}\left(\bigcup_{i=1}^M p^i\right)$$

Denotamos politopo $Q = \text{conv}(\bigcup_{i=1}^M p^i)$.

Luego podemos pedir que x^* sea un vertice de Q . Pero $V(Q) \subseteq \bigcup_{i=1}^M p^i \subseteq S$.

Por lo que tenemos que $x^* \in S \implies z^{PLM} = z^{PL*}$

2. Optimización combinatorial

Definición 1. Se dice conjunto integral si: $S \subseteq \mathbb{R}^n : S = \text{conv}(S \cap \mathbb{Z}^n)$

Teorema 3. Sea $P = P(A; b)$ poliedro racional y puntiagudo. Los siguientes son equivalentes:

- 1) P es poliedro integral.
- 2) Cada cara de P tiene un punto integral.
- 3) $\forall c \in \mathbb{R}^n : (\max\{c^T x : x \in P\} < +\infty \implies \exists \text{ solución integral } x^*)$
- 4) $\forall c \in \mathbb{Z}^n : (\max\{c^T x : x \in P\} < +\infty \implies \exists \text{ solución integral } x^*)$
- 5) $\forall c \in \mathbb{Z}^n : (\max\{c^T x : x \in P\} \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\})$

Demostración:

- 1) $\implies$ 2) : Sea F cara de P .

Sea $x \in F \subseteq P = \text{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$. Luego $\exists x^1, \dots, x^t \in P \cap \mathbb{Z}^n$ tal que $x = \sum_{i=1}^t \lambda_i x^i$ con $\lambda_i > 0, 1^T \lambda = 1$.

Observación: Los x^i también están en F .

Sea $I = \text{act}(F)$. $\forall j \in J : b_j = a_j^T x = \sum_{i=1}^t \lambda_i a_j^T x^i < \sum_{i=1}^t \lambda_i b_j = b_j \implies$.

Todos los $x^i \in F \implies$ cualquier $x^i \in F \cap \mathbb{Z}^n$.

- 2) $\implies$ 3) : Sea $c \in \mathbb{R}^m$ tal que $\max\{c^T x : x \in P\} < +\infty$.

Tomemos $F = \arg \max\{c^T x : x \in P\}$ el cual es cara. Por 2) tiene un punto integral.

- 3) $\implies$ 4) : Directo.

- 4) $\implies$ 5) : $c^T x^* \in \mathbb{Z}$.

- 5) $\implies$ 1) : Por contradicción:

Sea x° en vértice no integral, es decir, x_j° fraccional para algún j .

$x^\circ = \arg \max\{c^T x : x \in P\}$ para cierto $c = \sum_{j \in \text{act}(x^\circ)} a_j$.

Como P es racional, C se puede escalar a ser integral. Como x° es el único máximo:

$$\hat{c} = c + \frac{1}{M} e_j$$

Con e_j dirección canónica j y $M \in \mathbb{N}, M \gg 0 \implies M\hat{c}$ es dirección tal que x° es el único máximo.

$$\underbrace{M\hat{c}^T x^\circ}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{Mc^T x^\circ}_{\in \mathbb{Z}} = (Mc^T x^\circ + e_j^T x^\circ) - Mc^T x^\circ = e_j^T x^\circ = x_j \quad \nRightarrow \text{por 5)}.$$