

Pauta Examen

P1

A) Es directo que $E(X) = \theta$, $Var(X) = \theta^2$
ya que $X \sim \exp(\frac{1}{\theta})$

1,0

1,0

Otras opciones es calcularla por def o FGM

b) $P(e^{-X/\theta} < x)$

$$P(-\frac{x}{\theta} < \ln(x))$$

$$P(-x < \theta \ln(x))$$

+0,4 $P(X > -\theta \ln(x))$

$$1 - \int_0^{-\theta \ln x} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} dt \quad / \frac{d}{dx}$$

$$-\frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} + \frac{\theta \ln x}{\theta} \cdot \theta \cdot \frac{1}{x}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{1-\theta} \quad +0,5$$

Al ser $Y(x) = e^{-x/\theta}$

Una función continua y ~~monótona~~ decreciente

No hay saltos.

Solo hay valores entre

$$e^{-\infty/\theta} = 0 \quad +0,1$$

$$e^{0/\theta} = 1 \Rightarrow Y \sim U(0,1)$$

$0 \Leftrightarrow \text{cero}$

c) Se dispone

la función de ~~verosimilitud~~ verosimilitud es:

$$\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)$$

$$\prod_{i=1}^n \frac{e^{-x_i/\theta}}{\theta} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x_i)$$

$$\frac{1}{\theta^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i} \cdot \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x_i)$$

Assumimos que $\forall i \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x_i) = 1$

Aplico log

$$\log(L) = \ln \frac{1}{\theta^n} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta} \rightarrow 0,5$$

Para encontrar los óptimos derivamos e igualamos a 0.

$$\frac{d}{d\theta} \log(L) = \frac{d}{d\theta} (-n \ln \theta) - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

$$0 = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{n}{\theta} = \frac{1}{\theta^2} \sum x_i \Rightarrow \theta = \frac{\sum x_i}{n} \rightarrow 0,3$$

Comprobamos que es max.

$$\frac{d}{d\theta^2} \log(L) = +\frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^n x_i$$

Recordar

$$= \frac{n}{\bar{x}^2} - \frac{2}{\bar{x}^3} \cdot n \bar{x}$$

$\theta_{\max}$ ←

$$= \frac{n}{\bar{x}^2} - \frac{2n}{\bar{x}^2} \quad +0,2$$

$$= -\frac{n}{\bar{x}^2} < 0 \quad \blacksquare$$

Por lo tanto es máximo.

$$d) P\left(\frac{|\bar{X} - \theta|}{\sigma} \leq 0.1\right) = 0.95$$

Importante notar que $\mu = \mathbb{E}(X_i) = \theta$ y

$$\sigma^2 = \text{Var}(X_i) = \theta^2 \quad + 0.3$$

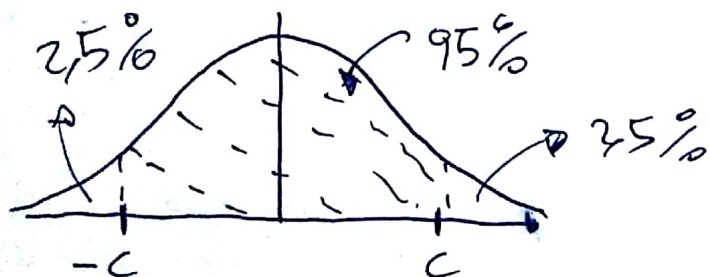
TCL nos dice que

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1)$$

$$P\left(\frac{|\bar{X} - \mu|}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 0.1\sqrt{n}\right) = 0.95$$

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < 0.1\sqrt{n}\right) = 0.95 + 0.7$$

Recordemos la simetría de la Gauss



$$1.96 = \frac{1}{10} \sqrt{n}$$

$$n \approx 384 \text{ o } 385$$

Buscamos en la tabla normal

$$c = 1.96$$

(El c que corresponde a 2.5%)

$$+ 0.5$$

e) $p = P(\text{que el tiempo de espera sea mayor a 10 min})$

$$1-p = P(\text{que no})$$

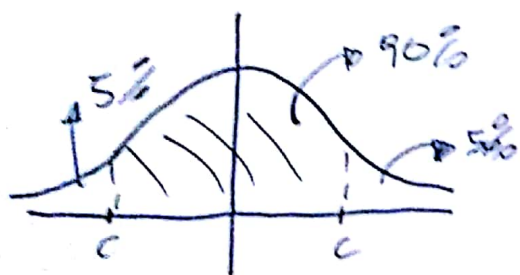
Entonces se desea estimar el parámetro p de una v.a. con ley ~~bernoulli~~ bernoulli.

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0,1) \quad +0.4$$

Esto es por TCL $+0.1$

Para encontrar el intervalo buscamos uno simétrico centrado en 0 (se podría buscar otro)

$$90\% = P(-c \leq Z \leq c) \approx P(|N(0,1)| \leq c)$$



Del mismo argumento de la parte anterior

$$c = 1.65 \text{ ó } 1.64$$

despejo y queda

$$90\% = P\left(\hat{p} - c \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} \leq p \leq \hat{p} + c \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}\right) \quad +0.5$$

$$\hat{p} = 0.1$$

$$n = 100$$

$$c = 1.64$$

reemplazando el intervalo queda

$$[0.05, 0.149] \quad +0.5$$