

P2

No ocupo V , porque $U \approx V$ cuando escribo mucho
 $X \sim \text{Gamma}(\theta_1, \lambda)$ $Y \sim \text{Gamma}(\theta_2, \lambda)$

d) Se definen $U = X + Y$ $T = \frac{X}{X + Y}$

Teorema del cambio de variable

$$f_{U,T}(u,t) = f_{X,Y}(g^{-1}(u,t)) | \det Jg^{-1}(u,t) |$$

~~$g(x,y)$~~ , $g(x,y) = (x+y, \frac{x}{x+y}) = (u, t)$

$$\Rightarrow g^{-1}(u,t) = (ut, u - ut) = (x, y) \quad 0,5$$

Dado que $X \perp Y$ $f_{X,Y} = f_X \cdot f_Y$

$$Jg^{-1}(u,t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial ut}{\partial u} & \frac{\partial ut}{\partial t} \\ \frac{\partial u-ut}{\partial u} & \frac{\partial u-ut}{\partial t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t & u \\ 1-t & -u \end{bmatrix}$$

0,5

$$\det(Jg^{-1}(u,t)) = -ut - u(1-t) = -u$$

$$f_{U,T}(u,t) = \frac{\lambda e^{-\lambda u} (\lambda u)^{\theta_1-1}}{\Gamma(\theta_1)} \cdot \frac{\lambda e^{-\lambda(u(1-t))} (\lambda(u(1-t)))^{\theta_2-1}}{\Gamma(\theta_2)} \cdot \mathbb{I}_{[0,\infty)}(u) \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(t)$$

0,5

Las indicatrices deben ser evaluadas en u y en t

X y Y son v.a's mayores que cero, $u = x + t$

u es la suma de 2 n's positivos, es

siempre positivo y tiende a ∞

$$u \in [0, \infty)$$

$$t = \frac{x}{x+y}$$

t es un cociente de 2 n's positivos, es siempre positivo,

$$t \in [0, 1]$$

Además el numerador es siempre menor que el numerador entonces $t \in [0, 1]$

0,5

Recordando los términos se tiene que:

$$f_{U,T}(u,t) = \frac{e^{-\lambda u} \cdot \lambda^{\theta_1+\theta_2} \cdot u^{\theta_1+\theta_2-1} \cdot t^{\theta_1-1} (1-t)^{\theta_2-1}}{\Gamma(\theta_1) \cdot \Gamma(\theta_2)} \cdot \mathbb{I}_{[0,\infty)}(u) \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(t)$$

0,5

b) la definición de $f_U(u) = \int_0^{\infty} f_{U,T}(u,t) dt$

$$f_T(t) = \int_0^{\infty} f_{U,T}(u,t) du$$

Para indicatriz de t la primera cambia sus límites

b) $f_U(u) = \int_0^{\infty} f_{U,T}(u,t) dt$ * Por la indicatriz de la variable t , los límites cambian.

$f_T(t) = \int_0^{\infty} f_{U,T}(u,t) du$

1) $f_U(u) = \int_0^1 \frac{e^{-\lambda u} \lambda^{\theta_1 + \theta_2} u^{\theta_1 + \theta_2 - 1} t^{\theta_1 - 1} (1-t)^{\theta_2 - 1}}{\Gamma(\theta_1) \Gamma(\theta_2)} dt$

$= \frac{e^{-\lambda u} \lambda^{\theta_1 + \theta_2} u^{\theta_1 + \theta_2 - 1}}{(\Gamma(\theta_1) \Gamma(\theta_2))} \frac{\Gamma(\theta_1 + \theta_2)}{\Gamma(\theta_1 + \theta_2)} \int_0^1 t^{\theta_1 - 1} (1-t)^{\theta_2 - 1} dt$

$= \frac{e^{-\lambda u} \lambda (\lambda u)^{\theta_1 + \theta_2 - 1}}{\Gamma(\theta_1 + \theta_2)} \int_0^1 \frac{t^{\theta_1 - 1} (1-t)^{\theta_2 - 1}}{B(\theta_1, \theta_2)} dt$ ley Beta(θ_1, θ_2)

$f_U(u) = \frac{\lambda e^{-\lambda u} (\lambda u)^{\theta_1 + \theta_2 - 1}}{\Gamma(\theta_1 + \theta_2)} \quad \mathbb{I}_{[0, \infty)}(u)$

Por temas de comodidad obvié la indicatriz hasta el final. 0,8

$$f_T(x) = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\lambda u} \lambda^{\theta_1 + \theta_2} u^{\theta_1 + \theta_2 - 1} t^{(\theta_1 - 1)} (1-t)^{\theta_2 - 1} du}{\Gamma(\theta_1) \Gamma(\theta_2)}$$

$$= \frac{t^{\theta_1 - 1} (1-t)^{\theta_2 - 1}}{B(\theta_1, \theta_2)} \int_0^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda u} (\lambda u)^{\theta_1 + \theta_2 - 1}}{\Gamma(\theta_1 + \theta_2)} du$$

$$f_T(x) = \frac{t^{\theta_1 - 1} (1-t)^{\theta_2 - 1}}{B(\theta_1, \theta_2)} \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda u} (\lambda u)^{\theta_1 + \theta_2 - 1}}{\Gamma(\theta_1 + \theta_2)} du}_{\text{Gamma}(\theta_1 + \theta_2, \lambda)} \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$$

Es una Beta (θ_1, θ_2)

Obvié la indicatriz de t hasta este punto por un tema de comodidad. 0,8

Se puede notar que $f_{U,T} = f_U \cdot f_T$

Por lo que $U \perp\!\!\!\perp T$

$$f_{T|U} = \frac{f_{U,T}}{f_U} = \frac{f_T \cdot f_U}{f_U} = f_T(x) \quad 0,4$$

Si son independientes las v.a's no tienen influencia entre si.

c)

Por inducción

Caso base $n=1$

Reemplazando en la densidad
se deduce esta igualdad

$$\sum_{i=1}^1 Z_i = Z_1 \sim \exp(\lambda) = \text{Gamma}(1, \lambda)$$

se cumple

0,5

Paso Inductivo, se supone caso n cierto y se intenta demostrar caso $n+1$.

$$S_{n+1} = Z_{n+1} + S_n$$

$$Z_{n+1} \sim \text{Gamma}(1, \lambda)$$

$$S_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda) \Rightarrow \text{H.I.}$$

la densidad de U parte b) es la suma de 2
Gamma, S_{n+1} también es la suma de 2 Gamma
aplicando lo anterior $S_{n+1} = \text{Gamma}(n+1, \lambda)$

Por lo que se cumple, y queda demostrada
la inducción

1