

Pauta
C3

P3/ X va, $f_X(x) = \alpha x_0^\alpha x^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{[x_0, \infty)}(x)$, $\alpha > 0$ desconocido y $x_0 > 0$ conocido.

a) Dg $\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n [\ln(x_i) - \ln(x_0)]}$.

De la función verosimilitud:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, x_0, \alpha) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n \alpha x_0^\alpha x_i^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{[x_0, \infty)}(x_i)$$

$$= \alpha^n x_0^{n\alpha} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{[x_0, \infty)}(x) = \alpha^n x_0^{n\alpha} \left[\prod_{i=1}^n x_i \right]^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{[x_0, \infty)}(x)$$

α se encuentra en el exponente, por lo que conviene maximizar la log-verosimilitud. Ya que $\ln(x)$ es creciente, maximizar L equivale a maximizar $\ln(L)$.

$$\Lambda(x_1, \dots, x_n, x_0, \alpha) = \ln(L(x_1, \dots, x_n, x_0, \alpha))$$

$$= n \ln(\alpha) + n\alpha \ln(x_0) - (\alpha+1) \ln \left[\prod_{i=1}^n x_i \right]$$

$$= n \ln(\alpha) + n\alpha \ln(x_0) - (\alpha+1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \quad \parallel \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \Lambda \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{\alpha} + n \ln(x_0) - \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\alpha} = \sum_{i=1}^n [\ln(x_i) - \ln(x_0)]$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n [\ln(x_i) - \ln(x_0)]}$$

1
b) $E(Y^{-1}) \geq E(Y)^{-1} (\forall Y > 0)$ c.s.; $E(Y^{-1}) = E(Y)^{-1} \Leftrightarrow Y = \text{cte.}$
Dg. $\hat{\alpha}$ es sesgado.

Un estimador es sesgado si $E(\hat{\alpha}) \neq \alpha$

$$\text{Se tiene que } E(\hat{\alpha}^{-1}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n [\ln(X_i) - \ln(X_0)]}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^n [\ln(X_i) - \ln(X_0)]\right] \\ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [E[\ln(X_i) - \ln(X_0)]] \quad 0,3$$

De la parte (c), $[\ln(X_i) - \ln(X_0)] \sim \exp(\alpha)$, luego

$$E(\hat{\alpha}^{-1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{n} \frac{n}{\alpha} \quad 0,2$$

Con esto $E(\hat{\alpha}^{-1}) = \frac{1}{\alpha}$. Utilizando la desigualdad del enunciado,

$$E(\hat{\alpha}^{-1}) \geq E(\hat{\alpha})^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{E(\hat{\alpha})} \Leftrightarrow E(\hat{\alpha}) \geq \alpha$$

$\hat{\alpha}$ sería insesgado si $\hat{\alpha} = \text{cte}$ pues se alcanzaría la igualdad, pero sabiendo que $\ln(X_i) - \ln(X_0) \sim \exp(\alpha) \Rightarrow \hat{\alpha} \neq \text{cte.}$

Por lo tanto se tiene que $E(\hat{\alpha}) > \alpha$ y $\hat{\alpha}$ es sesgado. 0,5

1.5

c) Dg. $P(X > x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha$ y deducir que $\ln(X) - \ln(x_0) \sim \exp(\alpha)$.

$$\begin{aligned}
 P(X > x) &= 1 - P(X < x) = 1 - \int_{-\infty}^x \alpha x_0^\alpha X^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{(x_0, \infty)}(x) dX \\
 &= 1 - \alpha x_0^\alpha \left[\frac{X^{-(\alpha+1)+1}}{-(\alpha+1)+1} \right] \Big|_{x_0}^x = 1 - \alpha x_0^\alpha \frac{x^{-\alpha}}{-\alpha} \Big|_{x_0}^x \\
 &= 1 - \frac{\alpha x_0^\alpha x^{-\alpha}}{-\alpha} + \alpha x_0^\alpha \frac{x_0^{-\alpha}}{-\alpha} = 1 + x_0^\alpha x^{-\alpha} - 1 \\
 &= \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha // \text{ 0.5}
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 P(\ln(X) - \ln(x_0) > x) &= P\left(\ln\left(\frac{X}{x_0}\right) > x\right) = P\left(\frac{X}{x_0} > e^x\right) \\
 &= P\left(x > x_0 e^x\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{de lo anterior}}}{=} \left(\frac{x_0}{x_0 e^x}\right)^\alpha = e^{-x\alpha} // \text{ 0.5}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función densidad se obtiene des de la distribución:

$$\begin{aligned}
 F(\ln(X) - \ln(x_0)) &= 1 - P(\ln(X) - \ln(x_0) > x) = 1 - e^{-x\alpha} \\
 \Rightarrow f_x(\ln(X) - \ln(x_0)) &= \frac{\partial}{\partial x} [1 - e^{-x\alpha}] = \alpha e^{-x\alpha} // \text{ 0.5}
 \end{aligned}$$

La cual es una densidad que caracteriza una exponencial,

15

d) Deducir que $\frac{1}{\hat{\alpha}} \rightarrow \frac{1}{\alpha}$ cs en probabilidad cuando $n \rightarrow \infty$.
Es $\hat{\alpha}$ consistente?

De la parte anterior, $\ln(X) - \ln(X_0) \sim \exp(\alpha)$, y
 $E[\ln(X) - \ln(X_0)] = \frac{1}{\alpha}$.

La Ley de los Grandes Números garantiza que, para una cantidad de muestras suficientemente grande, el promedio de éstas tiende casi seguramente y en probabilidad a la esperanza de la distribución que siguen las muestras.

De esto y de que $\ln(X) - \ln(X_0) \sim \exp(\alpha)$, se tiene que

$$\frac{\sum_{i=1}^n [\ln(X_i) - \ln(X_0)]}{n} \xrightarrow[n]{\text{CS}} \frac{1}{\alpha} \quad 0,5$$

Notando que la expresión para el promedio de $\ln(X) - \ln(X_0)$ es igual a $\hat{\alpha}^{-1}$, se concluye que

$$\frac{1}{\hat{\alpha}} \xrightarrow[n]{\text{CS}} \frac{1}{\alpha} \quad 0,5$$

$\hat{\alpha}$ sí es consistente ya que converge en probabilidad a α . ($\frac{1}{\hat{\alpha}} \rightarrow \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \hat{\alpha} \rightarrow \alpha$) 0,5