MA3403-3 Probabilidades y Estadística

Profesor: Joaquín Fontbona

Auxiliares: Enrique Vilchez, Nicolás Zalduendo

Control 3

13 de agosto de 2018

P1. El tiempo (en días) que cierto componente electrónica tarda en fallar es una variable aleatoria con densidad $f(x) = 2x\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Cuando la componente falla, es inmediatamente reemplazada por otra componente independiente del mismo tipo. Denotemos X_i la duración de la i -ésima componente usada, y sea $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ el instante en que ocurre la n -ésima falla.

- a) (1.5 pts) Muestre que $E(X_1) = 2/3$ y $Var(X_1) = 1/18$.
- b) (1.5 pts) Suponga (en este ítem solamente) que usted dispone de 15 componentes. Usando la desigualdad de Chebychev, encuentre una cota inferior para la probabilidad de que la última componente falle pasados los 8 días y antes de 12.
- c) (1.5 pts) ¿Cuántas componentes se necesitan para que, con probabilidad aproximada de 90% la duración promedio sea mayor que 14 horas? Utilice TCL. Indicación: Puede usar el hecho que $P(N > 1,28) = 0,1$ con $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- d) (1.5 pts) Se define r como la *tasa asintótica de falla*, es decir $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{S_n}$. Explique porqué y en qué sentido existe dicho límite r y calcúlelo explícitamente.

P2. Se dice que una v.a. X tiene ley Gamma(θ, λ) si tiene densidad:

$$f_X(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x),$$

donde $\Gamma(\theta) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\theta-1} dx$. Decimos también que una variable aleatoria Z tiene ley Beta(θ_1, θ_2) si tiene densidad:

$$f_Z(z) = \frac{z^{(\theta_1-1)}(1-z)^{(\theta_2-1)}}{B(\theta_1, \theta_2)} \mathbf{1}_{[0,1]}(z)$$

donde $B(\theta_1, \theta_2) = \frac{\Gamma(\theta_1)\Gamma(\theta_2)}{\Gamma(\theta_1+\theta_2)}$. (No se pide chequear que estas son densidades de probabilidad).

- a) (2.5 pts) Suponga que $X \sim \text{Gamma}(\theta_1, \lambda)$ e $Y \sim \text{Gamma}(\theta_2, \lambda)$ son v.a. independientes. Se definen v.a. U y V como $U = X + Y$ y $V = X/(X + Y)$. Muestre que la densidad conjunta de U y V es:

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{e^{-\lambda u} \lambda^{\theta_1+\theta_2} u^{\theta_1+\theta_2-1} v^{\theta_1-1} (1-v)^{\theta_2-1} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(u) \mathbf{1}_{[0,1]}(v)}{\Gamma(\theta_1)\Gamma(\theta_2)}$$

- b) (2.0 pts) Calcule las densidades marginales de U y V , identifique a qué v.a. corresponden e indique si son v.a. independientes. Encuentre la densidad condicional de V dado que $U = u$.
- c) (1.5 pts) Sean $Z_1, \dots, Z_n$ variables aleatorias i.i.d. que distribuyen como $\exp(\lambda)$. Usando las partes anteriores, pruebe por inducción que $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ distribuye como $\text{Gamma}(n, \lambda)$.

P3. Sea X una variable aleatoria con densidad $f_X(x) = \alpha x_0^\alpha x^{-(\alpha+1)} \mathbf{1}_{[x_0, \infty)}(x)$, donde $\alpha > 0$ es desconocido y $x_0 > 0$ es conocido (se dice que X tiene distribución de Pareto de parámetros α, x_0).

- a) (2.0 pts) Se toma una muestra aleatoria simple $X_1, \dots, X_n$ con misma distribución que X . Muestre que el estimador de máxima verosimilitud de α está dado por $\hat{\alpha} = n / (\sum_{i=1}^n \ln(X_i) - \ln(x_0))$.

- b) (1.0 pto) Usando el hecho (que no se pide probar) que $\mathbb{E}(Y^{-1}) \geq \mathbb{E}(Y)^{-1}$ para toda v.a. $Y > 0$ c.s., con igualdad ssi $Y = cte$, muestre que $\hat{\alpha}$ es sesgado.
- c) (1.5 ptos) Muestre que $\mathbb{P}(X > x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha$ y deduzca que $\ln(X) - \ln(x_0)$ tiene distribución exponencial de parámetro α .
- d) (1.5 pto) Deduzca que $\frac{1}{\hat{\alpha}} \rightarrow \frac{1}{\alpha}$ casi seguramente y en probabilidad cuando $n \rightarrow \infty$. Es $\hat{\alpha}$ un estimador consistente de α ?

Tiempo: 3 horas.