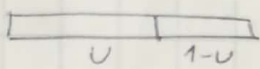


Problema
C2 - Pauta

a) i) 

Sea X una v.a. que representa el trozo mayor: $X = \max\{U, 1-U\}$.
Sea $x \in [0, 1]$, luego, para encontrar el tipo de distribución:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(\max(U, 1-U) \leq x) = P(U \leq x; 1-U \leq x) \\ &= P(U \leq x; U \geq 1-x) = P(1-x \leq U \leq x) \end{aligned} \quad 0,5$$

Los límites de U son válidos pues $U \in [0, 1]$. Como U distribuye uniformemente, se tiene

$$P(1-x \leq U \leq x) = \int_{1-x}^x f_U(u) du = \int_{1-x}^x \frac{1}{1-0} du = 2x - 1 \quad 0,5$$

Con esto $F_X(x) = 2x - 1$. Derivando,

$$F_X(x) = 2x - 1 \quad \frac{d}{dx}$$

$$f_X(x) = 2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \quad 0,5$$

Lo cual tiene la forma $\frac{1}{b-a}$. Notar que $f_X(x < \frac{1}{2}) = 0$,
pues el trozo mayor no puede ser menor a la mitad.
Por lo tanto $X \sim U(\frac{1}{2}, 1)$ 0,3 0,2

ii) Sea $Y = \frac{X}{1-X}$, luego

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{1-X} \leq y\right) = \mathbb{P}(X \leq y - yX) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{y}{1+y}\right)$$

$$= F_X\left(\frac{y}{1+y}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{y}{1+y}} f_X(x) dx = \frac{\frac{y}{1+y} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{y}{y+1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{y-1}{y+1} \quad 0,3$$

Derivando se obtiene la densidad

$$F_Y(y) = \frac{y-1}{y+1} \quad \bigg/ \quad \frac{d}{dy}$$
$$f_Y(y) = \frac{1(y+1) - 1(y-1)}{(y+1)^2}$$
$$f_Y(y) = \frac{2}{(y+1)^2} \quad 0,5$$

La cual está definida ($\forall y \in [1, \infty)$). 0,2

La probabilidad pedida se expresa en función de Y :

$$\mathbb{P}(X \leq 4(1-X)) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{1-X} \leq 4\right) = \mathbb{P}(Y \leq 4) = F_Y(4) = \frac{3}{5} \quad 1,0$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad S(\alpha) &= E[(X-\alpha)^2] \\
 &= E[X^2 - 2\alpha X + \alpha^2] \quad // \text{Linealidad} \\
 &= E(X^2) - 2\alpha E(X) + \alpha^2 \quad 0,5
 \end{aligned}$$

Para probar que $S(\alpha) \geq V(X)$ se busca $\min\{S(\alpha)\}$. Optimizando:

$$\begin{aligned}
 S(\alpha) &= E(X^2) - 2\alpha E(X) + \alpha^2 \quad / \frac{\partial}{\partial \alpha} \\
 &\quad - 2E(X) + 2\alpha \stackrel{!}{=} 0 \\
 &\quad \alpha = E(X) \quad 0,5
 \end{aligned}$$

Luego $\alpha = E(X)$ optimiza $S(\alpha)$. Para demostrar que es el mínimo se deriva de nuevo.

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} S(\alpha) = 2 > 0 \Rightarrow S(\alpha) \text{ es convexa y el óptimo la minimiza.} \quad 0,2$$

Con esto, para $\alpha = E(X)$,

$$\begin{aligned}
 \min\{S(\alpha)\} &= S(E(X)) = E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X) \\
 &= E(X^2) - E^2(X) \\
 &= V(X) \quad 0,5
 \end{aligned}$$

Luego, como $S(\alpha)$ es convexa, se concluye que $(\forall \alpha) [S(\alpha) \geq V(X)]$, y en particular $S(\alpha) = V(X) \Leftrightarrow \alpha = E(X)$ $\blacksquare$ $0,3$