Control 2. Probabilidades y Estadística

9 de Julio de 2018

Profesor: Joaquín Fontbona. Auxiliares: Nicolas Zalduendo, Enrique Vilchez.

1. a) **[3.0 pts.] Convergencia de leyes geométricas a la ley exponencial.**
   Def. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y X variables aleatorias. Decimos que "X_n converge en ley o en distribución a X" si

   $$F_{X_n}(x) \to F_X(x), \text{ cuando } n \to \infty$$

   para todo $x \in \mathbb{R}$ que es punto de continuidad de F_X.
   nace por Sandwich
   Sea $\lambda > 0$ y (G_n) v.a. geométricas de parámetros $p_n := \lambda/n > 0$ (definidas para n suficientemente grande).
   Pruebe que la sucesión de variables aleatorias (G_n/n) converge en ley a una v.a. exponencial de parámetro λ.
   Ind.: Verifique que para todo $x \geq 0$, $\mathbb{P}(G_n/n > x) = \mathbb{P}(G_n > \lfloor xn \rfloor)$.

   b) **[3.0 pts.]** Se modelan los instantes de conexiones a un red inalámbrica en un período del día de la siguiente forma:
   *) El número de conexiones en lapso de tiempo de largo $t > 0$ tiene ley de Poisson $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ de parámetro λt, donde $\lambda > 0$ es un parámetro fijo.
   **) Los "número de conexiones" en intervalos de tiempo disjuntos son v.a. independientes.
   Diga si los supuestos *) y **) son compatibles o no y porqué, y calcule la probabilidad de que no haya ninguna conexión entre $t = 0$ y $t = t_1 > 0$. Deduzca que el instante aleatorio $T > 0$ cuando ocurre la primera conexión tiene ley exponencial de parámetro λ.

2. a. Se dispone de un cordel de largo 1, el cual se corta en un punto escogido al azar (es decir, uniformemente).
   a.i) **[2.0 pts.]** Sea X el largo del trozo mayor. Muestre que X es una variable uniforme en el intervalo $[1/2, 1]$.
   a.ii) **[2.0 pts.]** Encuentre la densidad de $X/(1-X)$. Calcule la probabilidad de que el largo del trozo mayor sea a lo más 4 veces el largo del trozo menor.

   b. **[2.0 pts.]** Sea X una variable aleatoria. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ se define $s(\alpha) = \mathbb{E}[(X - \alpha)^2]$. Pruebe que $s(\alpha) \geq Var(X)$ para todo α y que se alcanza la igualdad sólo cuando $\alpha = \mathbb{E}(X)$.

3. **Distribución de Gumbel**
   Sean $\mu \in \mathbb{R}$ y $\beta > 0$. Se dice que una variable aleatoria real X sigue una distribución de Gumbel de parámetros (μ, β) si:

   $$F_X(t) \;=\; \exp\left(-\exp\left\{-\left(\frac{t-\mu}{\beta}\right)\right\}\right) \quad t \in \mathbb{R}.$$

   μ y β se denominan respectivamente parámetros de localización y de escala. En este problema estudiaremos algunas propiedades de esta distribución.

a) **[1.0 pts.]** Verifique que F_X es una función de distribución y calcule la densidad de una variable aleatoria Gumbel de parámetros $(0, 1)$.

b) **[1.0 pts.]** Muestre que si X es una v.a. Gumbel de parámetros (μ, β) entonces para $a > 0, b \in \mathbb{R}$, la v.a. $Y = aX + b$ sigue una ley Gumbel de parámetros $(a\mu + b, a\beta)$.

c) **[1.5 pt.]** Utilice las partes anteriores y propiedades de la esperanza para calcular $\mathbb{E}(X)$ para X v.a. Gumbel de parámetros (μ, β), expresando el resultado en términos de la constante de Euler $\gamma := \cancel{\int_0^\infty \log(y)e^{-y}dy}$ $-\int_0^\infty \ln(y)e^{y}dy$

d) **[1.5 pts.]** Pruebe que si X_1, X_2 son v.a.'s Gumbel independientes de parámetros $(\mu_i, \beta), i = 1, 2$, entonces $Z = \max\{X_1, X_2\}$ tiene una distribución Gumbel de parámetros (μ, β) con:

$x = \exp(\ln(x))$

$$\mu = \beta \ln \left(\sum_{j=1}^{2} e^{\frac{\mu_j}{\beta}} \right)$$

e) **[1.0 pts.]** Pruebe que X tiene ley Gumbel de parámetros $(0, 1)$ ssi $X = -\ln(Y)$ donde Y tiene ley exponencial de parámetro 1.

Tiempo: 3:00 hrs