

MA3401-01 Probabilidades

Profesor: Raúl Gouet B.

Auxiliar: Diego Marchant D.



Auxiliar 4: Experimentos aleatorios

9 de Abril de 2018

P1 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\{A_n : n \geq 1\}$ una familia numerable de sucesos independientes. Sean $\limsup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ y $\liminf A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$. Suponga que $p_n = \mathbb{P}(A_n)$, $n \geq 1$ y que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$.

- Muestre que $\mathbb{P}(\liminf A_n^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{m=n}^N (1 - p_m)$.
- Usando la desigualdad exponencial, concluya que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.
- Aplique el resultado anterior para mostrar que en una sucesión de elementos independientes de una moneda, con probabilidad constante de cara $p \in (0, 1)$, aparecen infinitas caras e infinitos sellos con probabilidad 1.

P2 Un ciclista debe viajar de la ciudad A a la ciudad C , pasando por B . Para ir de A a B hay un sólo camino que tiene un puente, que puede estar operativo o no (puente cortado). Si el puente está operativo entonces puede viajar de A a B y caso contrario, el viaje debe aplazarse hasta que sea reparado el puente. Para ir de B a C hay dos caminos: El camino nuevo que tiene dos puentes y el camino viejo que tiene un puente. Igual que antes, para usar cualquiera de los dos caminos es necesario que los puentes respectivos estén operativos. Debido a los continuos temblores los 4 puentes están operativos, cada uno con probabilidad $p \in (0, 1)$. Se sabe también que los puentes son independientes entre sí. Se pide calcular:

- Probabilidad de realizar el viaje de A a C .
- Probabilidad de realizar el viaje de A a C , habiendo llegado a B .
- Probabilidad de realizar el viaje de A a C , sabiendo que uno de los puentes está cortado.
- Probabilidad de realizar el viaje de A a C , sabiendo que al menos un puente está cortado.
- Probabilidad de que haya un puente cortado, sabiendo que hizo el viaje de A a C .

P3 Los dirigentes del PPA (Partido por la Aleatoriedad), Pedro Random y Juan Azar dicen la verdad (aleatoriamente y de manera independiente) sólo un tercio de las veces. Pedro declara ante los medios de comunicación que él no ha emitido boletas ideológicamente falsas para el conglomerado de empresas HEXA. Posteriormente Juan Azar declara que le consta que su camarada Pedro Random ha dicho la verdad. Calcule la probabilidad de que Pedro esté realmente diciendo la verdad.

P4 Modele: ¿Cuál es la probabilidad de que en el n -ésimo lanzamiento independiente de moneda (con probabilidad $p \in (0, 1)$ de cara) salga la r -ésima cara? ($r < n$).