

Pauta Aux. 8

P1. Escribimos el sistema como ecuación matricial:

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y + e^{-2t} \\ y' &= x + 2y - e^{-2t} \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Con esto, lo primero es resolver si la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable, con el objetivo de calcular su exponencial de forma sencilla.

Lo segundo, es notar que se puede hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= A\vec{x} + b(t) \Rightarrow \vec{x}' - A\vec{x} = b(t) \quad / e^{-\int A dt} \\ &\Rightarrow \left[\vec{x} e^{-\int A dt} \right]' = e^{-\int A dt} b(t) \\ &\Rightarrow \vec{x} e^{-At} = \int_t e^{-At} b(t) dt + \vec{C} \\ &\Rightarrow \vec{x}(t) = \left[\int_t e^{-At} b(t) dt + \vec{C} \right] e^{-At} \end{aligned}$$

lo que, con condiciones iniciales, se transformaría en la fórmula de Duhamel.

¿Es A diagonalizable? $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (2-\lambda)^2 - 1$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3 \quad \wedge \quad \lambda_2 = 1$$

Si tiene dos valores propios distintos, siendo la matriz de 2×2 , ya es diagonalizable (¿por qué?) Calulemos los vectores propios asociados.

$$\underline{\lambda=3}: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -a+b=0 \\ a-b=0 \end{matrix} \Rightarrow a=b$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda=1}: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a+b=0 \\ a+b=0 \end{matrix} \Rightarrow a=-b$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así, siendo A diagonalizable, se puede escribir $A = PDP^{-1}$,
con $P = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2)$ y $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, como A es diagonalizable, $e^{At} = P e^{Dt} P^{-1}$, con $e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$

$$\therefore e^{At} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{demostrar!}}{=} -e^{2t} \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\vec{x}(t) = \left[-\int_t^{\cdot} e^{2t} \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} dt + \vec{C} \right] e^{2t} \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$$

Esto se simplifica y se calcula facilito, así que queda propuesto.

P2) la matriz A dada es, explícitamente,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Necesitamos ver si es o no diagonalizable pues, de serlo, sabemos que es más fácil resolver el sistema. ¡Claim! No lo es. Para verlo, hagamos el caso 2×2 :

$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - \tilde{\lambda} & 1 \\ 0 & \lambda - \tilde{\lambda} \end{vmatrix} = (\lambda - \tilde{\lambda})^2 = 0 \Rightarrow \tilde{\lambda} = \lambda$$

Es el único valor propio, tiene multiplicidad algebraica 2. Si su multiplicidad geométrica es 2, es diagonalizable; si es menor, no.

$$\begin{pmatrix} \lambda - \tilde{\lambda} & 1 \\ 0 & \lambda - \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tiene multiplicidad geométrica 1. Si en el caso 2×2 no es diagonalizable, en general entonces no lo es (¿por qué?).

Como no podemos diagonalizar A, la matriz exponencial hay que calcularla a mano. Haciendo esto, la solución al problema será $\vec{x}(t) = \vec{C} e^{At}$.

$$\text{Recordemos: } e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}$$

Hagamos, otra vez, un caso particular para calcular A^k . El caso general es análogo y queda de ejercicio (sí, claro). Veamos el caso 4×4 :

$$A_4 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow A_4^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4 \text{ (esto es siempre)}$$

$$A_4^1 = A_4$$

$$A_{4ij}^2 = (A_4 \cdot A_4)_{ij} = \sum_k A_{4ik} A_{4kj} = \begin{cases} \lambda^2, & j=i \\ 1, & j=i+2 \\ 0, & \sim \end{cases}$$

$\begin{matrix} & k=i & k=i+1 & k=i+2 \\ & \downarrow & \uparrow & \uparrow \\ A_{4ik} & A_{4kj} & A_{4kj} \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & k=i & k=i+1 & k=i+2 \end{matrix}$

$$A_4^3{}_{ij} = (A_4^2 \cdot A_4)_{ij} = \sum_k (A_4^2)_{ik} \cdot A_4{}_{kj} = \begin{cases} \lambda^3 & , j=i \\ 1 & , j=i+3 \\ 0 & , \sim \end{cases}$$

$\begin{matrix} & & k=i & & k=i & j=i \\ & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ & & (A_4^2)_{ik} & \cdot & A_4{}_{kj} & \\ & \uparrow & & & \uparrow & \\ k=i+2 & & k=i+2 & & j=i+3 & \end{matrix}$

Hasta aquí, el patrón ha sido

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda^3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

$A_4^0 \quad A_4^1 \quad A_4^2 \quad A_4^3$

Luego, $A_4^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$, para $k \geq 4$. Así,



$$e^{A_4 t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & e^{\lambda t} & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & t \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Más generalmente,

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & e^{\lambda t} & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Otra forma (propuesta) era descomponer $A = \lambda I_n + N$, con I_n la matriz identidad, y $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, notando que $(\lambda I_n)N = N(\lambda I_n)$ y que, por ende, $e^{At} = e^{(\lambda I_n + N)t} = e^{(\lambda I_n)t} e^{Nt} = e^{\lambda t} e^{Nt}$, y calcular e^{Nt} .

Esto ya nos da la solución $\vec{x}(t) = \vec{c} e^{At}$.

P3. Tenemos que encontrar primero los valores propios. Como no piden la forma de Jordan, se puede anticipar que es no diagonalizable, por lo que habrá que "rellenar" con vectores propios, los llamados vectores propios generalizados.

$$\begin{vmatrix} -\frac{5}{2}-\lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2}-\lambda \end{vmatrix} = -(\frac{5}{2}+\lambda)(2+\lambda)(\frac{3}{2}+\lambda) - \frac{1}{2}(2+\lambda)\frac{1}{2}$$

$$= -(2+\lambda)(\lambda+2)^2 = -(\lambda+2)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -2 \text{ con mult. alg. } 3.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = 0 \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c = 0 \\ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = c$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tiene multiplicidad geométrica 2. Así, no es diagonalizable y nos falta encontrar un vector propio generalizado para completar los tres. Para ello, basta con una combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, y resolver

$$(A - \lambda I)\vec{w} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Se prueba con valores sencillos para α y β (no 0, pues nos devolvería a $\vec{v}_1$ o $\vec{v}_2$ y no sería l.i.) Notamos que $\alpha = \beta = 1$ no sirve, pues el sistema no tiene solución, pero con $\alpha = -\beta = 1$ sí sirve:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -a + c = 2 \Rightarrow c = a + 2$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a+2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{este ya está en } \vec{v}_2, \text{ así que no aporta}$$

Así, podemos usar un vector de la forma $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a+2 \end{pmatrix}$, con a cualquiera, y obtenemos un tercer vector, l.i. con $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Tomando $a=0$,

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, toda matriz se puede descomponer en su forma de Jordan, de manera que $A = PJP^{-1}$, con $P = [\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \vec{v}_3]$

$$y \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{bmatrix} & \\ & & \lambda \end{bmatrix}$$

λ tenía mult. alg. 3, por lo que sale 3 veces, multo geom. 2 y tenía un vector generalizado. Lo que está en rojo corresponde a esto.

Esta descomposición tiene la siguiente gracia:

$$e^{At} = P e^{Jt} P^{-1}, \quad \text{con} \quad J = \begin{bmatrix} M_1 & & \\ & M_2 & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & M_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \end{bmatrix}$$

$$= P \begin{bmatrix} e^{M_1 t} & & 0 \\ & e^{M_2 t} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & e^{M_n t} \end{bmatrix} P^{-1}$$

Pero en P_2 ya vimos cómo se calcula $e^{M_i t}$. Así, en este caso, queda

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} -2t & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} t \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, $e^{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & t \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$, por lo que

$$\vec{x}(t) = \vec{c} e^{At} = \vec{c} P \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

P4 Podemos describir el sistema como

$$\begin{aligned} LI' &= V \\ RC V' &= -RI - V \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} I' &= \frac{1}{L} V \\ V' &= -\frac{1}{C} I - \frac{1}{RC} V \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Para ver el asunto hay que calcular valores propios y sus vectores propios asociados:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1/L \\ -1/C & -1/RC - \lambda \end{vmatrix} = \cancel{\lambda^2 + \lambda/RC + 1/LC} = \lambda(\lambda + 1/RC) + 1/LC$$

$$= \lambda^2 + \lambda \cdot 1/RC + 1/LC = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-1/RC \pm \sqrt{\frac{1}{R^2 C^2} - \frac{4}{LC}}}{2}$$

Hay dos casos: $\frac{1}{R^2 C^2} - \frac{4}{LC} \neq 0$ ó $\frac{1}{R^2 C^2} - \frac{4}{LC} = 0$.

$\neq$: La matriz es diagonalizable y es paraya.

$=$: Hay que ver. $\lambda = -\frac{1}{2RC}$ (mult. alg. 2) $\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2RC} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{2RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2RC} a + \frac{1}{L} b = 0$$

$$-\frac{1}{C} a - \frac{1}{2RC} b = 0 \Rightarrow b = -\frac{L}{2RC} a = -2Ra$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -2Ra \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2R \end{pmatrix} \quad (\text{mult. geom. } 1)$$

Se busca un vector generalizado $\vec{w}$ tal que $(A - \lambda I)\vec{w} = \alpha \vec{v}$

es decir, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2RC} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{2RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2R\alpha \end{pmatrix} \xRightarrow{\alpha=1} 2Ra + b = L$

$$\Rightarrow b = -2Ra + L$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ -2Ra + L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}$$

Nos quedamos ~~con~~ con $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}$, pues $\begin{pmatrix} 1 \\ -2R \end{pmatrix}$ ya estaba en $\vec{v}$. Así,

$$A = PJP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2R & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2RC} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2R & L \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2R & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2RC} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & 0 \\ 2R & 1 \end{pmatrix}$$

y la solución $\begin{pmatrix} I(t) \\ V(t) \end{pmatrix}$ se calcula igual que en P1,
(caso diagonalizable) o igual que en P3 (caso contrario).

Nota: En el primer caso, podrían salir números complejos. Lo que se hace en ese caso es, en la exponencial que sale, usar la fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$