Pauta Auxiliar 5

P1 La EDO queda de la forma

$$\circledast \quad a y'' x^2 + b y' x + c y = 0$$

Proponiendo $y(x) = x^\lambda$, tenemos $y'(x) = \lambda x^{\lambda-1}$, $y''(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$

Remplazamos en $\circledast$:

$$a\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}x^2 + b\lambda x^{\lambda-1}x + c x^\lambda = 0$$

$$\Rightarrow x^\lambda \left[a\lambda(\lambda-1) + b\lambda + c \right] = 0$$

$$\Rightarrow x^\lambda \left[a\lambda^2 + (b-a)\lambda + c \right] = 0$$

$$\therefore \underbrace{x = 0}_{\substack{\text{ésta daría la} \\ \text{solución trivial} \\ y(x)=0}} \quad \vee \quad a\lambda^2 + (b-a)\lambda + c = 0$$

Debemos, entonces, resolver para λ: $\lambda_{1,2} = \dfrac{(a-b) \pm \sqrt{(a-b)^2 - 4ac}}{2a}$

Haciendo el análogo con las EDO que se resuelven por polinomio característico, debemos separar las posibles soluciones en tres casos. Sea $\Delta = (a-b)^2 - 4ac$:

- $\Delta > 0$: se tienen dos soluciones $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, y así la solución general tiene la forma

$$y(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$$

- $\Delta < 0$: se tienen dos soluciones $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, donde

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

Luego, las soluciones fundamentales tienen la forma

$$x^{\alpha \pm i\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{\pm i\beta}$$

Nos preocupa el segundo factor, pues queremos soluciones reales.
Notemos que

$$x^{\pm i\beta} = e^{\ln(x^{\pm i\beta})} = e^{\pm i\beta \ln(x)}$$

$$= \cos(\beta \ln(x)) \pm i \sin(\beta \ln(x))$$

Como $x^{\pm i\beta}$ se descompone en suma de dos funciones l.i, estas funciones también son admisibles como soluciones fundamentales, por lo que ahora

$$y(x) = C_1 x^{\alpha} \cos(\beta \ln(x)) + C_2 x^{\alpha} \sin(\beta \ln(x))$$

- $\Delta = 0$: En este caso, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$. Así, una solución fundamental es $y_1(x) = x^{\lambda}$. Para encontrar y_2, podemos usar la estrategia de la Auxiliar 3:

$$y_2(x) = u(x) x^{\lambda} = u(x) y_1(x)$$

$$\rightarrow \quad y_2'(x) = u' y_1 + u y_1'$$

$$\rightarrow \quad y_2''(x) = u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1''$$

$$\Rightarrow a y_2'' x^2 + b y_2' x + c y_2 = u[a y_1'' x^2 + b y_1' x + c y_1] + u'[2a y_1' x^2 + b y_1 x] + a y_1 u'' x^2$$

$$= a y_1 u'' x^2 + [2a y_1' x^2 + b y_1 x] u'$$

$$= 0$$

$y_1 = x^{\lambda}$

$$\Rightarrow \quad a x^{\lambda+2} u'' + [2a\lambda x^{\lambda+1} + b x^{\lambda+1}] u' = 0$$

$$\Rightarrow \quad a x u'' + [2a\lambda + b] u' = 0$$

$u' = v$

$$\Rightarrow \quad a x v' + [2a\lambda + b] v = 0$$

$$\Rightarrow \quad v' = -\frac{2a\lambda + b}{ax} v$$

$\rightarrow$ Pero esto es super fácil

$$\Rightarrow \ln(V) = -\frac{(2a\lambda+b)}{a}\ln(x)$$

$$\Rightarrow V = x^{-\frac{(2a\lambda+b)}{a}}$$, recordando que $\lambda = \frac{a-b}{2a}$, queda

$$V = x^{-1}$$

$$\Rightarrow u' = x^{-1} \Rightarrow u(x) = \ln(x)$$

$$\therefore \ y_2(x) = \ln(x) \cdot x^{\lambda}$$

En estos tres casos, es relativamente sencillo verificar que las soluciones encontradas son linealmente independientes. ¡Háganlo! Finalmente, como las soluciones pueden escribirse en términos de potencias de x, para que todo funcione siempre, $x_0 > 0$. Esto se ve con más claridad cuando la solución contiene un logaritmo.

P2 i) Usamos polinomio característico para resolver la ecuación homogénea:

$$y'' + y = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \quad (Re(\lambda) = 0; Im(\lambda) = 1)$$

$$\Rightarrow y_H(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x)$$

Para encontrar la solución particular al problema no-homogéneo, llamamos $y_1(x) = \cos(x)$, $y_2(x) = \sin(x)$ (las soluciones fundamentales del problema homogéneo) y usamos el resultado de la P3 de la Auxiliar #3 (llamado Método de Variación de Parámetros):

$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, con

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)}{W(y_1,y_2)}g(x)\,dx \quad , \quad u_2(x) = \int \frac{y_1(x)}{W(y_1,y_2)}g(x)$$

$W(y_1,y_2) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$, $g(x)$ el lado derecho de la EDO.

Así, en este problema $\quad u_1 = -\int \sin^2(x)\,dx = -\int \frac{1-\cos(2x)}{2}dx$

$$\left\{ W(y_1,y_2) = \det\begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} = 1 \right\} \quad = -\frac{1}{2}x + \frac{\cos(2x)}{4}.$$

$g(x) = \sin(x)$

$$u_2 = \int \cos(x)\sin(x)\,dx = \frac{\sin^2(x)}{2}$$

$$\therefore\ y_p(x) = -\frac{1}{2}x\cos(x) + \cos(x)\frac{\cos(2x)}{4} + \frac{\sin^3(x)}{2}$$

y, así, la solución general al problema no-homogéneo es

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x).$$

ii) Nuevamente, resolvemos primero el problema homogéneo con polinomio característico:

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$$

$$\Rightarrow y_H(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

Aquí, $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{-2x}$, $g(x) = \frac{1}{1+e^x}$ y

$$W(y_1,y_2) = \det\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{pmatrix} = -e^{-3x}$$

$$\therefore\ u_1 = -\int \frac{e^{-2x}}{-e^{-3x}}\,\frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx \overset{\substack{v = 1+e^x \\ dv = e^x dx}}{=} \ln(1+e^x)$$

$$u_2 = \int \frac{e^{-x}}{-e^{-3x}}\,\frac{1}{1+e^x}\,dx = -\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx \overset{\substack{v = 1+e^x \\ dv = e^x dx}}{=} -\int \frac{v-1}{v}dv$$

$$= -v + \ln(v) = -(1+e^x) + \ln(1+e^x)$$

$$\therefore\ y_p(x) = e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-2x}\left[-(1+e^x) + \ln(1+e^x)\right]$$

y la solución general es $\quad y(x) = y_H(x) + y_p(x).$

iii) El problema homogéneo queda $x^2y'' + xy' + y = 0$.

Ya no podemos usar polinomio característico, pues los coeficientes que acompañan a y no son constantes. Sin embargo, podemos notar que se trata de una EDO del tipo Euler-Cauchy, por lo que usamos la parte anterior, con $a=b=c=1$. Así, queda resolver la ecuación

$$a\lambda^2 + (b-a)\lambda + c = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i.$$

Esto cae en el segundo caso ($\Delta = 0$), con $Re(\lambda)=0$ y $Im(\lambda)=1$:

$$y_H(x) = C_1 \cos(\ln(x)) + C_2 \sin(\ln(x))$$

Con esto, $y_1(x) = \cos(\ln(x))$, $y_2(x) = \sin(\ln(x))$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ y

$$W(y_1,y_2) = \det\begin{pmatrix} \cos(\ln(x)) & \sin(\ln(x)) \\ -\frac{\sin(\ln(x))}{x} & \frac{\cos(\ln(x))}{x} \end{pmatrix} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore\ u_1 = -\int \frac{\sin(\ln(x))}{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}\,dx = -\int \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,dx = \cos(\ln(x))$$

$$u_2 = \int \frac{\cos(\ln(x))}{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}\,dx = \int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx = \sin(\ln(x))$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \cos^2(\ln(x)) + \sin^2(\ln(x)) = 1$$

$$\therefore\ y(x) = y_H(x) + y_p(x) = C_1\cos(\ln(x)) + C_2 \sin(\ln(x)) + 1.$$

P3 i) La ecuación homogénea queda

$$D\frac{d^4w}{dx^4} + F\frac{d^2w}{dx^2} + \Delta\rho\, h\, w = 0$$

Con el supuesto que las cantidades $D, F, \Delta\rho$ y h son constantes positivas, podemos resolver usando polinomio característico:

$$D\lambda^4 + F\lambda^2 + \Delta\rho h = 0$$

Usando $m = \lambda^2$, $Dm^2 + Fm + \Delta\rho\, h = 0$

$$\Rightarrow m = \frac{-F \pm \sqrt{F^2 - 4D\Delta\rho h}}{2D}$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{-F \pm \sqrt{F^2 - 4D\Delta\rho h}}{2D}}$$ (son, posiblemente, cuatro valores de λ)

Este esquema nos lleva a cuatro soluciones fundamentales.

ii) Como hacemos que $F=0$, $\lambda = \pm\sqrt{\frac{\pm\sqrt{-4D\Delta\rho h}}{2D}} = \pm\sqrt{\pm i\sqrt{\frac{\Delta\rho h}{D}}}$

$$= \pm\sqrt{\pm i}\ \sqrt[4]{\frac{\Delta\rho h}{D}}$$

Notemos que $\pm i = e^{\pm i\pi/2} \Rightarrow \sqrt{\pm i} = e^{\pm i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$

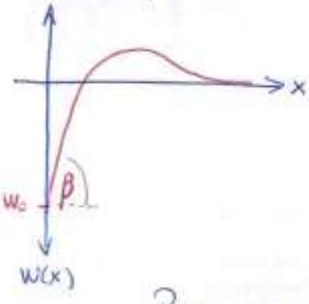
$$\Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)\sqrt[4]{\frac{\Delta\rho h}{D}} = \pm(1\pm i)\sqrt[4]{\frac{\Delta\rho h}{4D}} = \pm(1\pm i)\,\alpha$$

Luego, tenemos los valores
$\lambda_1 = \alpha + i\alpha$
$\lambda_2 = \alpha - i\alpha$
$\lambda_3 = -\alpha + i\alpha$
$\lambda_4 = -\alpha - i\alpha$

y las soluciones respectivas, lo que nos da

$$y_H(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\alpha x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\alpha x) + C_3 e^{-\alpha x}\cos(\alpha x) + C_4 e^{-\alpha x}\sin(\alpha x)$$

iii) Para interpretar la información dada como condiciones de borde, podemos guiarnos con el siguiente gráfico:

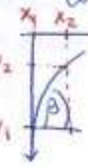


De aquí, se puede escribir

- $w(0) = w_0$
- $w'(0) = -\operatorname{tg}\beta$
- $\lim_{x\to\infty} w(x) = 0$

Para ver cómo se conoce la segunda condición de borde, se puede hacer lo siguiente:

Notar que $w(x)$ se mide hacia "abajo".



$$\rightarrow \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} \approx \operatorname{tg}\beta \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \approx -\operatorname{tg}\beta$$

$$x_2 \to x_1 \Rightarrow y'(x_1) = -\operatorname{tg}\beta$$

$$\Rightarrow w'(0) = -\operatorname{tg}\beta$$

Como queremos que $\lim_{x\to 0} w(x) = 0$, C_1 y C_2 deben ser 0, porque si no, $w(x) \to \infty$. Así, nos quedamos con

$$w(x) = C_3 e^{-\alpha x}\cos(\alpha x) + C_4 e^{-\alpha x}\sin(\alpha x)$$

Luego, $w(0) = C_3$ y además $w(0) = w_0 \Rightarrow C_3 = w_0$

Finalmente, $w'(x) = C_3(-\alpha)e^{-\alpha x}\cos(\alpha x) - C_3 e^{-\alpha x}\alpha\sin(\alpha x)$
$+ C_4(-\alpha)e^{-\alpha x}\sin(\alpha x) + C_4 e^{-\alpha x}\alpha\cos(\alpha x)$

$$\Rightarrow w'(0) = -\alpha C_3 + \alpha C_4 = -\alpha w_0 + \alpha C_4$$

y, además, $w'(0) = -\operatorname{tg}\beta$. Así, $-\alpha w_0 + \alpha C_4 = -\operatorname{tg}\beta$

$$\Rightarrow -w_0 + C_4 = -\frac{\operatorname{tg}\beta}{\alpha}$$

$$\Rightarrow C_4 = w_0 - \frac{\operatorname{tg}\beta}{\alpha}$$

Luego, la solución es

$$w(x) = e^{-\alpha x}\left[w_0\cos(\alpha x) + \left(w_0 - \frac{\operatorname{tg}\beta}{\alpha}\right)\sin(\alpha x)\right]$$