Pauta Auxiliar 3

P1 i) Usando las condiciones iniciales dadas, $y(x_0)=y_0$
$y'(x_0)=y_0'$

$$\longrightarrow \quad y_0 = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0)$$
$$y_0' = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0)$$

Esto equivale a un sistema matricial, a saber,

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Para que c_1, c_2 estén bien definidas, debería ser posible despejar el vector $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, para lo que necesitamos que la matriz involucrada sea invertible. Una condición equivalente de esto, es que su determinante sea distinto de cero. Así, necesitamos que

$$y_1(x_0)\cdot y_2'(x_0) - y_1'(x_0)\, y_2(x_0) \neq 0 \qquad \otimes$$

Ahora, si $y_2(x) = \alpha y_1(x)$, se tiene que $y_2'(x) = \alpha y_1'(x)$

$$\overset{\otimes}{\Rightarrow} \quad y_1(x_0)\, \alpha y_1'(x_0) - y_1'(x_0)\, \alpha y_1(x_0) = 0 \longrightarrow \text{NO PUEDE SER}$$

ii) Suponiendo que $y_2(x) = u(x)\, y_1(x)$, con $y_1(x)$ conocido, tenemos

$$y_2'(x) = u' y_1 + u y_1'$$
$$y_2''(x) = u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1''$$

Como queremos que $y_2(x)$ sea solución de la EDO, debemos imponer que satisfaga la ecuación del enunciado. Así,

$$a(u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1'') + b(u' y_1 + u y_1') + c u y_1 \quad \text{Aquí reordenamos}$$
$$= u[a y_1'' + b y_1' + c y_1] + a y_1 u'' + [2a y_1' + b y_1] u' \quad \text{Sigue}$$

$$= u \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Esto es pues } y_1 \\ \text{es solución de la EDO}}}{0} + a y_1 u'' + \underbrace{[2ay_1' + by_1] u'}$$

Esto es pues y_1
es solución de la EDO

$= 0$

Esto es lo que imponemos
para que y_2 sea solución

Para encontrar $y_2(x)$, basta encontrar $u(x)$. Como $y_1(x)$ es conocida, hay que resolver $a y_1 u'' + [2ay_1' + by_1] u' = 0$ para u.

Con el cambio $\begin{matrix} z = u' \\ z' = u'' \end{matrix}$, $\quad a y_1 z' + [2ay_1' + by_1] z = 0$

$$\Rightarrow z' + \underbrace{\frac{2ay_1' + by_1}{ay_1}}_{= p(x)} z = 0$$

$$\Rightarrow \left[z\, e^{\int p(x)} \right]' = 0$$

$$\Rightarrow z = C e^{-\int p(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow u(x) = C \int e^{-\int p(x)\,dx}\, dx + \tilde{C}$$

Podemos obviar $\tilde{C}$, pues $y_2 = u y_1$, por lo que ese término contribuye un múltiplo de y_1 a la solución, y dijimos que eso no aporta. Como en la solución más general, $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, y_2 ya va a estar acompañado por la constante c_2, podemos obviar también C. Así,

$$u(x) = \int e^{-\int p(x)\,dx}\, dx$$
$$= \int e^{-\int \frac{2ay_1' + by_1}{ay_1}\,dx}\, dx$$

Para ver que c_1 y c_2 están bien definidas, basta verificar $\otimes$:

$y_1 y_2' - y_1' y_2 = y_1(u' y_1 + u y_1') - y_1' u y_1 = u' y_1^2 \neq 0$, pues

- si $y_1 = 0$, estaríamos usando la solución trivial de la EDO, e inicialmente no era así.

- si $u' = 0$, entonces $u = cte \Rightarrow y_2$ es múltiplo de y_1 $\times$

Así, $u' y_1^2 \neq 0$ y, por lo tanto, C_1 y C_2 están bien definidas.

iii) Ver que $y_1(x) = x$ es solución es sencillo: $y_1 = x$, $y_1' = 1$, $y_1'' = 0$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_1'' - 2xy_1' + 2y_1 = -2x + 2x = 0$$

Para hallar otra solución $y_2(x)$, hacemos la suposición de que tiene la forma $y_2(x) = u(x) y_1(x) = x \cdot u(x)$, con

$$u(x) = \int e^{-\int \frac{ay_1' + by_1}{ay_1} dx} dx$$

y con $a(x) = 1-x^2$
$b(x) = -2x$
$c(x) = 2$

Así,
$$\int \frac{ay_1' + by_1}{ay_1} dx = \int \frac{1-x^2-2x^2}{(1-x^2)x} = \int \frac{1}{x} - \frac{2x}{1-x^2} dx$$

$$= \ln(x) + \ln(1-x^2)$$

$$= \ln(x) + \ln(1+x) + \ln(1-x)$$

$$\Rightarrow e^{-\int \frac{ay_1' + by_1}{ay_1} dx} = e^{-\ln(x) - \ln(1+x) - \ln(1-x)} = \frac{1}{x(1-x^2)}$$

$$\Rightarrow u(x) = \int \frac{1}{x(1-x^2)} dx = \int \frac{dx}{x(1+x)(1-x)}$$

Resolviendo por fracciones parciales, $\frac{1}{x(1+x)(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{1-x}$

$$\rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1/2 \\ C = 1/2 \end{cases} \quad \therefore u(x) = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{-1/2}{1+x} dx + \int \frac{1/2}{1-x} dx$$

$$= \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x) + \frac{1}{2}\ln(1-x)$$

$$= \ln\left(x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

$\therefore \quad y_2(x) = x\,u(x) = x \ln\left(x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

P2) Proponiendo la solución $y(x) = e^{\lambda x}$; con λ aún desconocido, tendremos que $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$

$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Imponiendo esta solución en la EDO, se debe tener que

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

$$\Rightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad , \text{ pues } e^{\lambda x} > 0 \text{ siempre}$$

Así, λ se determina por $\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, y la solución dependerá de la naturaleza del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

- $\Delta > 0$: se tendrán $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ distintos. Luego, la solución general será $\quad y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

  Se verifica $\otimes$ de la P1 : $e^{\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_2 x} \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 x}$
  $$= e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}[\lambda_2 - \lambda_1] \neq 0 \quad \checkmark$$

- $\Delta < 0$: se tendrán $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ distintos, de la forma

  $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$. Luego, las soluciones son similares a las anteriores, pero están dadas por funciones complejas, y quisiéramos una solución real. Recordemos entonces que si y_1 e y_2 son soluciones, también lo son $y_1 + y_2$ y $y_1 - y_2$.

$$\Rightarrow \quad y_1 + y_2 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}[e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}]$$

$$y_1 - y_2 = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}[e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}]$$

Recordemos también que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\Rightarrow \quad y_1 + y_2 = e^{\alpha x}\cdot 2\cos(\beta x) \Rightarrow \frac{y_1+y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

$$y_1 - y_2 = e^{\alpha x}\cdot 2i\sin(\beta x) \Rightarrow \frac{y_1-y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Finalmente, si $\tilde{y}$ es solución, también lo es $c\cdot\hat{y}$, por lo que $\frac{1}{2}(y_1+y_2)$ y $\frac{1}{2i}(y_1-y_2)$ son solución de la EDO. Con todo esto, se obtiene la solución en términos sólo de funciones reales:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

y la condición ⊛ nuevamente se verifica:

$$(\alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\sin(\beta x))\, e^{\alpha x}\sin(\beta x) - e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,(\alpha e^{\alpha x}\sin(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x))$$

$$= -e^{2\alpha}\beta \neq 0$$, pues la parte imaginaria es no nula ✓

- $\Delta = 0$: en este caso, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ por lo que está garantizado que $y_1(x) = e^{\lambda x}$ es solución. Sin embargo, no nos aporta para conocer una segunda solución. Usamos, entonces, el método de P1, proponiendo $y_2(x) = \mu(x)\, y_1(x) = \mu(x)\, e^{\lambda x}$

$$\text{con} \quad \mu(x) = \int e^{-\int \frac{2a y_1' + b y_1}{a y_1}dx}dx = \int e^{-\int \frac{2a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x}}{a e^{\lambda x}}dx}dx$$

$$= \int e^{-\int \frac{2a\lambda + b}{a}dx}dx$$

pero notemos que $\lambda = \frac{-b}{2a}$, por lo que $2a\lambda + b = 0$

$$\Rightarrow \quad \mu(x) = \int e^{-\int 0\, dx}dx = \int dx = x$$

Así, $y_2(x) = x e^{\lambda x}$, con lo que la solución general es

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2\, x e^{\lambda x}$$

Nota: Todo lo anterior sirve únicamente si a, b y c son constantes.

i) $2y'' - 5y' - 3y = 0 \xRightarrow{y(x)=e^{\lambda x}} 2\lambda^2 e^{\lambda x} - 5\lambda e^{\lambda x} - 3e^{\lambda x} = 0$

$\Rightarrow 2\lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0$

$\rightarrow \lambda = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \dfrac{5 \pm 7}{4}$

$\rightarrow \lambda_1 = 3 \; ; \; \lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$\therefore y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}$ (primer caso, $\Delta > 0$)

ii) $y'' + y' + y = 0 \xRightarrow{y(x)=e^{\lambda x}} \lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$\rightarrow \lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \; ; \; \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (segundo caso, $\Delta < 0$)

$\therefore y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

iii) $y'' - 10y' + 25y = 0 \xRightarrow{y(x)=e^{\lambda x}} \lambda^2 e^{\lambda x} - 10\lambda e^{\lambda x} + 25 e^{\lambda x} = 0$

$\rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$

$\rightarrow (\lambda - 5)^2 = 0$

$\rightarrow \lambda = 5$ (tercer caso, $\Delta = 0$

$\therefore y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$

P3.

i) Usando que $y_P = u_1 y_1 + u_2 y_2$, con y_1, y_2 soluciones de la EDO homogénea,

$$y_P' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'$$

$$y_P'' = [u_1' y_1 + u_2' y_2]' + u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''$$

$$\Rightarrow a y_P'' + b y_P' + c y_P = u_1 \{a y_1'' + b y_1' + c y_1\} + u_2 \{a y_2'' + b y_2' + c y_2\}$$
$$+ a[u_1' y_1 + u_2' y_2]' + a(u_1' y_1' + u_2' y_2') + b(u_1' y_1 + u_2' y_2)$$

Como y_1, y_2 son solución de la EDO homogénea, $a y_i'' + b y_i' + c y_i = 0$, $i = 1,2$

$$= a[u_1' y_1 + u_2' y_2]' + b(u_1' y_1 + u_2' y_2) + a(u_1' y_1' + u_2' y_2')$$
$$= g(x)$$

ii) Recordemos que buscamos dos condiciones sobre u_1, u_2 para que la ecuación

$$a(u_1' y_1 + u_2' y_2)' + b(u_1' y_1 + u_2' y_2) + a(u_1' y_1' + u_2' y_2') = g(x)$$

se cumpla. Como el término $u_1' y_1 + u_2' y_2$ aparece dos veces, una de ellas derivado, lo más fácil es imponer que sea cero, pero si esto ocurre, el término $u_1' y_1' + u_2' y_2'$ debe ser igual a $\frac{g(x)}{a(x)}$

$$\Rightarrow \quad u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$
$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = \frac{g}{a} = \tilde{g}$$

Este sistema tiene como incógnitas u_1' y u_2', y se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{g} \end{bmatrix}$$

iii) Como y_1, y_2 son soluciones válidas para la EDO homogénea, el determinante de la matriz es no nulo. Luego, podemos despejar el vector $\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{g} \end{bmatrix} = \frac{1}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \begin{bmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{g} \end{bmatrix}$$

De este modo, $\mu_1' = \dfrac{-y_2\tilde{g}}{y_1y_2'-y_1'y_2} \Rightarrow \mu_1(x) = -\displaystyle\int \frac{y_2\tilde{g}}{y_1y_2'-y_1'y_2}\,dx$

$$\mu_2' = \frac{y_1\tilde{g}}{y_1y_2'-y_1'y_2} \Rightarrow \mu_2(x) = \int \frac{y_1\tilde{g}}{y_1y_2'-y_1'y_2}\,dx$$

iv) Primero, resolvemos la ecuación homogénea

$$y''-2y'+y=0 \xrightarrow{y(x)=e^{\lambda x}} \lambda^2e^{\lambda x}-2\lambda e^{\lambda x}+e^{\lambda x}=0$$
$$\Rightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0$$
$$\Rightarrow (\lambda-1)^2=0$$
$$\rightarrow \lambda=1 \qquad (\text{Caso } \Delta=0)$$

$\therefore\ y(x) = C_1e^x + C_2xe^x$. Aquí, $y_1=e^x$, $y_2=xe^x$, $\tilde{g}=e^x$

Además, $y_1y_2'-y_1'y_2 = e^{2x}$

Así, $\mu_1(x) = -\displaystyle\int \frac{xe^x\,e^x}{e^{2x}}\,dx = -\int x\,dx = -\frac{x^2}{2}$

$\mu_2(x) = \displaystyle\int \frac{e^x\,e^x}{e^{2x}}\,dx = \int dx = x$

En ambos casos, se puede omitir la constante arbitraria. ¿Por qué?

$\Rightarrow\ y_p(x) = \mu_1y_1+\mu_2y_2 = -\frac{x^2}{2}e^x + x^2e^x = \frac{x^2}{2}e^x$

$\therefore\ y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{x^2}{2}e^x$ es la solución de la EDO no homogénea (o solución final).