Pauta Auxiliar Extra 1

P1

i) Queremos verificar las hipótesis del TEU. Para ello, despejamos y' y la redefinimos como $f(t,y)$:

$$f(t,y) = 2g'(t) + \sqrt{2}\, a \sin\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$

→ f es continua con respecto a t, pues $g \in \mathcal{C}^1$, en todo $t \in \mathbb{R}$.

→ f es diferenciable con respecto a y. Hay entonces dos formas de ver si es lipschitz:

1. Por definición: $$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = \left|2g' + \sqrt{2}\, a \sin\left(\frac{y_1}{\sqrt{2}}\right) - 2g' - \sqrt{2}\, a \sin\left(\frac{y_2}{\sqrt{2}}\right)\right|$$
$$= \sqrt{2}\, a \left|\sin\left(\frac{y_1}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{y_2}{\sqrt{2}}\right)\right|$$
$$\leq \sqrt{2}\, a \cdot L\, |y_1 - y_2|$$

De intro al cálculo, se sabe que $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$ por lo que de antemano $\sin(\cdot)$ es lipschitz.

2. Por acotamiento de la derivada: Para ver que es lipschitz en y, vemos que f es clase $\mathcal{C}^1$ c/r a y. Así, si la derivada de f c/r a y es acotada, entonces es globalmente lipschitz. En efecto, $$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = a \cos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq a, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

En cualquier caso, f es globalmente lipschitz, pues las constantes de acotamiento no dependen de t.
Por TEU global, $\exists!$ solución $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, que satisface $y(t_0) = y_0$.

ii) Como $\sin(y) \approx y - \frac{y^3}{6}$, se tiene que $$\sin\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \approx \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^3}{6} = \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{12\sqrt{2}}$$

Así, la EDO aproximada queda $$y' - \left[\frac{ay}{\sqrt{2}} - \frac{a\, y^3}{12\sqrt{2}}\right]\sqrt{2} = 2g'(t) = 0$$

Reordenando, $y' = ay - \dfrac{ay^3}{12}$ $(*)$

Ahora, hay dos líneas por las que se puede encontrar soluciones:

1. $y' = ay\left(1 - \dfrac{y^2}{12}\right) = ay\left(1 - \dfrac{y}{\sqrt{12}}\right)\left(1 + \dfrac{y}{\sqrt{12}}\right)$

$\Rightarrow y_1 = 0$, [redacted] $y_2 = \sqrt{12}$, $y_3 = -\sqrt{12}$ son solución

perdón ¡!

2. $y' - ay = -\dfrac{ay^3}{12} \Rightarrow y'y^{-3} - ay^{-2} = -\dfrac{a}{12}$ $\longrightarrow z = y^{-2}$

$z' = -2y^{-3}y'$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2}z' - az = -\dfrac{a}{12}$

$z' + 2az = \dfrac{a}{6}$ $/ \cdot e^{\int 2a\,dt} = e^{2at}$ $\longrightarrow$ $(ze^{2at})' = \dfrac{a}{6}e^{2at}$ $/ \int dt$

$ze^{2at} = \dfrac{1}{12}e^{2at} + C$

$\therefore z = \dfrac{1}{12} + Ce^{-2at} \Rightarrow y^{-2}(t) = \dfrac{1}{12} + Ce^{-2at}$

$\Rightarrow y(t) = \left[\dfrac{1}{12} + Ce^{-2at}\right]^{-1/2}$

Para que esta solución exista, el argumento de la raíz debe ser positivo. La única forma en que esto ocurra, es que $C \geq 0$ pues si $C < 0$, $(\exists\, t_0 \in \mathbb{R})(\forall t < t_0)$ $\dfrac{1}{12} + Ce^{-2at} < 0$.

Notemos que, si $C = 0$, se tiene $y_2 = \sqrt{12}$ (ya encontrada antes), sin embargo, $y_1 = 0$ y $y_3 = -\sqrt{12}$ no es posible obtenerlas a partir de $y(t)$. Así, la solución no es única, pero esto no contradice el TEU, pues $f(t,y) = ay - \dfrac{ay^3}{12}$ no es lipschitz c/r a y.

P2. i) $f(x,y) = xy - \sin(y)$ $\longrightarrow$ f es continua c/r a x.
$\longrightarrow$ Veamos si es lipschitz.

$$
\begin{aligned}
|f(x,y_1) - f(x,y_2)| &= |xy_1 - \sin(y_1) - xy_2 + \sin(y_2)| \\
&\leq |x(y_1 - y_2)| + |\sin(y_1) - \sin(y_2)| \\
&\leq |x||y_1 - y_2| + |y_1 - y_2| \\
&= (|x|+1)|y_1 - y_2|
\end{aligned}
$$

Esto es para un x fijo; el problema es que esto implica que no hay una constante L que acote $|f(x,y_1) - f(x,y_2)|$ SIEMPRE. Luego, es localmente lipschitz.

Por el TEU, $\exists !$ solución local, en un intervalo $J \subsetneq \mathbb{R}$ tal que $x_0 = 0 \in J$.

ii) $f(x,y) = 1 + y^2$ $\longrightarrow$ f es continua c/r a x.
$\longrightarrow$ Veamos si es lipschitz

Lo haremos de otra forma (esta forma también puede aplicarse en el ítem anterior). Claramente, $f \in \mathcal{C}^1$ c/r a y, y se tiene $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$. Ahora, f es globalmente lipschitz ssi esta derivada es acotada.
Esto no ocurre, así que sólo es localmente lipschitz. Así, $\exists !$ solución en un subintervalo $J \subseteq [-100, 100]$ tal que $x_0 = 0 \in J$.

En este caso, conocemos el rectángulo en que se encuentran (x,y) así que podemos determinar el intervalo maximal que nos provee el TEU local: si $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$, $|f(x,y)| \leq K$ entonces $|x - x_0| \leq \alpha$ es intervalo maximal, con $\alpha = \min\{a, \frac{b}{K}\}$.

Aquí, $x_0 = y_0 = 0$, $a = 100$, $b = 1$ y $K = 2$. Así, $|x| \leq \frac{1}{2}$ es maximal.

OJO. Resolviendo la EDO, $\frac{y'}{1+y^2} = 1 \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$

$\Rightarrow \arctan(y) = x + C$

$\Rightarrow y(x) = \tan(x+C)$

Como $y(0)=0$, $y(x) = \tan(x)$. Esta función sólo está bien definida en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (pues debe contener a $x_0 = 0$) pero este intervalo es más grande que el maximal encontrado antes. Esto ocurre pues el TEU sólo nos dice dónde es <u>seguro</u> que existe una solución única, dejando fuera otros posibles valores de x.

iii) $\cos(x)\, y' - \sin(x)\, y = 3x\cos(x) \Rightarrow y' = \tan(x)\, y + 3x = f(x,y)$

→ f es continua c/r a x <u>sólo</u> en los intervalos de la forma $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$. La condición inicial indica que debemos trabajar en el intervalo $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$.

→ f es localmente lipschitz, pues $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |\tan(x)|\,|y_1 - y_2|$ y $|\tan(x)|$ no se puede acotar en todo el intervalo $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$.

Así, $\exists!$ solución en un subintervalo $J \subseteq (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ tal que $x_0 = 2\pi \in J$. Uno estaría tentado a resolver la EDO explícitamente, pero esta vez eso no es viable.

iv) $y' = \sqrt{y} + 1$. En este caso, el TEU no aplica, puesto que la condición inicial $y(0)=0$ implica trabajar en un entorno de 0 para y, y $\sqrt{y}$ tiene pendiente no acotada ahí, por lo que no es lipschitz, ni siquiera localmente.

No obstante, la EDO igual se puede resolver, dando $\sqrt{y} - \ln(\sqrt{y}+1) = \frac{x}{2}$

v) $y' = y^{1/3}$. Para el caso $y(1) = 0$, nuevamente vemos que $f(x,y) = y^{1/3}$ no es lipschitz c/r a y.

Así, el TEU no puede aplicarse, aún si la EDO sí tiene solución $y(x) = [\frac{2}{3}x + C]^{3/2}$

Para el caso $y(1) = 1$ es distinto, pues la derivada de $f(x,y)$ c/r a y, que es $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3} y^{-2/3}$, sí es acotada en un entorno de $y_0 = 1$. Así, es localmente lipschitz, y entonces $\exists!$ solución definida en un intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x_0 = 1 \in J$.

P3. i) Primero, si la tasa a la que crece la felicidad es proporcional a "algo", esto se escribe

$$\text{tasa} \rightarrow f' = \underset{\uparrow \text{ proporción}}{\text{"algo"}} \cdot f \leftarrow \text{cantidad actual}$$

Así, $f' = (a - bT)f$. Además, T crece a tasa constante c, es decir $T' = c \Rightarrow T(t) = ct + d$. Imponiendo $T(0) = 0$, queda $T(t) = ct$, por lo que

$$f' = (a - bct) f \Rightarrow f(t) = k e^{at - \frac{bc}{2} t^2}$$

Además, $\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$.

ii) Primero resolvamos las EDOs, por separado:

$$x'' = -\mu x' \xrightarrow{z = x'} z' = -\mu z \Rightarrow z(t) = k e^{-\mu t}$$

Como $z(0) = x'(0) = v_0 \cos\theta_0$, $v_0 \cos\theta_0 = k \Rightarrow x'(t) = v_0 \cos\theta_0 \, e^{-\mu t}$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{v_0 \cos\theta_0}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$$

$$h'' = -g - \mu h' \xrightarrow{z = h'} z' = -g - \mu z$$

$$z' + \mu z = -g \quad / \, e^{\int \mu \, dt} = e^{\mu t}$$

$$(z e^{\mu t})' = -g e^{\mu t}$$

$$\Rightarrow z e^{\mu t} = -\frac{g}{\mu} e^{\mu t} + C$$

$$\Rightarrow z(t) = -\frac{g}{\mu} + C e^{-\mu t}.$$

Como $h'(0) = z(0) = v_0 \sin\theta_0$, $\quad z(t) = -\frac{g}{\mu} + (v_0 \sin\theta_0 + \frac{g}{\mu}) e^{-\mu t}$

$$\Rightarrow h(t) = -\frac{g}{\mu} t - \frac{1}{\mu}(v_0 \sin\theta_0 + \frac{g}{\mu}) e^{-\mu t} + C$$

Imponiendo $h(0) = 0$, $\quad h(t) = -\frac{g}{\mu} t + \frac{1}{\mu}(v_0 \sin\theta_0 + \frac{g}{\mu})(1 - e^{-\mu t})$

Para que el amigo se intoxique en tiempo finito, debe ocurrir que

$$\lim_{t \to \infty} X(t) > L \iff \frac{v_0 \cos\theta_0}{\mu} > L$$

$$\iff v_0 > \frac{L\mu}{\cos\theta_0}$$

iii) Resolvemos $\quad y' = (P_0 - y)(\sigma(t) + f(t) y)$

notando que y' depende de y en forma cuadrática y no a coeficientes constantes. Luego, hay que usar el método de Riccati. Una solución trivial es $y_1(t) = P_0$. Así, definiendo $z(t) = y - y_1 = y - P_0$, se tendrá que $z' = y'$ y

$$z' = -z(\sigma(t) + f(t)(z + P_0))$$

Perdón también por eso → [illegible]

$$\Rightarrow z' + z(f(t) P_0 + \sigma(t)) = -f(t) z^2$$

$$\Rightarrow \quad z^{-2} z' + z^{-1}\left(f(t) P_0 + \sigma(t)\right) = -f(t) \qquad , \; h = z^{-1}$$
$$h' = -z^{-2} z'$$

$$\Rightarrow \; -h' + h\left(f(t) P_0 + \sigma(t)\right) = -f(t)$$
$$h' - h(\underbrace{f(t) P_0 + \sigma(t)}_{\psi(t)}) = f(t)$$

Multiplicamos por $e^{\int \psi(t)\,dt}$

$$\Rightarrow \quad \left(h e^{\int \psi(t)\,dt}\right)' = f(t) e^{\int \psi(t)\,dt}$$

$$\Rightarrow \quad h(t) = e^{-\int \psi(t)\,dt} \left[\int f(t) e^{\int \psi(t)\,dt} dt + C \right]$$

$$\therefore \quad z(t) = e^{\int \psi(t)\,dt} \left[\int f(t) e^{\int \psi(t)\,dt} dt + C \right]^{-1}$$

$$\therefore \quad y(t) = z(t) + P_0$$