

MA2601-4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 2018.**Profesor:** Daniel Parra**Auxiliares:** José Manuel Palacios - Valentín Retamal**Fecha:** 02 de Abril de 2018

Auxiliar Extra 1

P1 Sean $a > 0$ y $g, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones, con g conocida, que satisfacen la EDO

$$y'(t) - \sqrt{2}a \sin\left(\frac{y(t)}{\sqrt{2}}\right) = 2g'(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

- i) Suponiendo que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, justifique por qué el problema de valor inicial con $y(t_0) = y_0$ siempre tiene una única solución definida en todo $\mathbb{R}$.
- ii) Suponiendo ahora que $g(t) \equiv b$ constante, si y es pequeño se puede usar la aproximación $\sin(y) \sim y - \frac{y^3}{6}$. Encuentre las soluciones de la EDO anterior aproximada. ¿Qué valores puede tomar la constante libre resultante para que $y(t)$ esté bien definida en todo $\mathbb{R}$? ¿Contradice esto el resultado del ítem anterior?

P2 Determine la existencia y unicidad de las soluciones para las siguientes EDOs:

- i) $y' = xy - \sin(y)$, $y(0) = 2$ para $x \in \mathbb{R}$.
- ii) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$ en el rectángulo $|x| \leq 100$, $|y| \leq 1$.
- iii) $\cos(x)y' - \sin(x)y = 3x \cos(x)$, $y(2\pi) = 0$.
- iv) $y' = \sqrt{y} + 1$, $y(0) = 0$ para $x \in [0, 1]$.
- v) $y' = y^{\frac{1}{3}}$, $y(1) = 0$. ¿Y si $y(1) = 1$?

P3 En abril, un estudiante de la FCFM pretende hacer honor al famoso refrán relativo a este mes. Para ello, prueba distintas razas, con el objetivo de experimentar sensaciones diversas.

- i) La primera raza que prueba hace que el nivel de felicidad en su cuerpo crezca a una tasa proporcional a la cantidad de toxinas presente T , en proporción $a - bT$, con $a, b > 0$. Sea f el nivel de felicidad en el instante t . Suponiendo que la cantidad de toxinas crece a una tasa constante c y que $T(0) = 0$, encuentre el nivel de felicidad que experimenta el estudiante. ¿Qué ocurre cuando $t \rightarrow \infty$?
- ii) La segunda raza que prueba contempla la estatura L del estudiante y la viscosidad en su sangre μ . Las leyes de Newton aseguran que su experiencia sigue las ecuaciones

$$\begin{cases} h''(t) = -g - \mu h'(t) \\ h(0) = 0 \\ h'(0) = v_0 \sin \theta_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x''(t) = -\mu x'(t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = v_0 \cos \theta_0 \end{cases}$$

donde h representa el nivel de humo que ingresa al cuerpo y x es la cantidad de estatura del estudiante que está bajo los efectos del estupefaciente. v_0 y θ_0 son la velocidad y el ángulo de ingreso del humo, respectivamente. Encuentre una solución a las ecuaciones anteriores y muestre que una condición necesaria para que nuestro amigo esté completamente intoxicado en tiempo finito, es que

$$v_0 > \frac{L\mu}{\cos \theta_0}$$

- iii) Ya cansado de tanto carrete, el estudiante decide vender todo lo que le sobró. La cantidad de gente que se espera que le compre sigue el modelo

$$y' = (P_0 - y)(\sigma(t) + f(t)y)$$

donde P_0 representa la población total de compradores potenciales, σ son los estímulos publicitarios y f es la felicidad que promete proveer el producto. Encuentre una solución para y y discuta sobre supuestos que puede realizar sobre el modelo.