Auxiliar 12: Sistemas No Lineales

Linealización y Diagramas de Fases

Profesor: Roberto Cortez
Auxiliar: Miguel Sepúlveda

Frente a un sistema lineal autónomo de la forma

$$f(x,y) = \dot{x}$$
$$g(x,y) = \dot{y}$$

Lo que se hace es definir

$$\vec{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \vec{F}(\vec{x}) \equiv \begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix}$$

Así, el sistema se reescribe como el SNLA

$$F(\vec{x}) = \dot{\vec{x}}$$

Cuando el sistema no es lineal, es común limitarse a estudiar el comportamiento en torno a los puntos críticos del sistema, es decir, los puntos $\vec{x}_0$ tales que $\vec{F}(\vec{x}_0) = 0$. Para estudiar el sistema, hacemos una expansión de primer orden de F en torno a $\vec{x}_0$, obtenemos un SL:

$$J(\vec{x}_0)\vec{\delta} + \mathcal{O}(||\vec{\delta}||^2) = \dot{\vec{x}}, \quad \vec{\delta} \equiv \vec{x} - \vec{x}_0, \quad \frac{\mathcal{O}(||\vec{\delta}||^2)}{||\vec{\delta}||} \xrightarrow{\vec{\delta}\to 0} 0$$
$$\Rightarrow J(\vec{x}_0)\vec{\delta} \approx \dot{\vec{\delta}}$$

Recordemos que el vector $J(\vec{x}_0)\vec{\delta}$ se interpreta como "La derivada de $\vec{F}$ en el punto $\vec{x}_0$ en la dirección δ", y el sistema nos dice que este vector corresponde precisamente a la derivada de δ, pero con respecto al tiempo.

P1.-

1. Para ver si existen puntos críticos en el vecindario de $\vec{x}_0$ en el sistema lineal, hay que ver si existe algún $\vec{\delta}$ tal que $J(\vec{x}_0)\vec{\delta} = 0$. Interprete la relación entre el valor de $\det J(\vec{x}_0)$ y si el punto $\vec{x}_0$ es aislado o no para el SL.

2. Para estudiar si existen puntos críticos en el vecindario de $\vec{x}_0$ para el SNLA en sí, hay que buscar $\vec{\delta}$ tales que $J(\vec{x}_0)\vec{\delta} + \mathcal{O}(||\vec{\delta}||^2) = 0$. Demuestre que si $\det J(\vec{x}_0) \neq 0$, entonces $\vec{x}_0$ es un punto aislado del SNLA.

$\boxed{\textbf{P2.-}}$ Estudie la naturaleza de los puntos críticos del siguiente sistema:

$$\dot{x} = x\Big(10 - x - \frac{y}{2}\Big)$$
$$\dot{y} = y(16 - y - x)$$

$\boxed{\textbf{P3.-}}$ Consideremos el sistema

$$x' = g(x, y) \equiv x^2 - y - 1$$
$$y' = h(x, y) \equiv -x^2 + y^2 - 2x - 1$$

1. Dibuje las nulclinas asociadas a g y h.
2. Identifique los puntos críticos del sistema, indicando si son o no aislados.
3. Para los puntos aislados, realice el diagrama local para sus SL asociados.
4. Realice un bosquejo general del SNLA