Auxiliar 11: Aplicaciones de la Transformada de Laplace

Aplicaciones en ecuaciones diferenciales

Profesor: Roberto Cortez
Auxiliar: Miguel Sepúlveda

Nuestro arsenal de propiedades y transformadas conocidas se ha expandido. Sean $f, g \in C_\alpha$, $\mathcal{L}$ cumple entonces las siguientes propiedades:

- El operador $\mathcal{L}$ es lineal.
- $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \dfrac{1}{s-a}$, $a \in \mathbb{C}$, para $s > \mathrm{Re}(a)$.
- $\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n[f](s) - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1} f^{(n-k)}(0^+)$, para $s > \alpha$.
- $\mathcal{L}[F(t)](s) = \dfrac{1}{s}\mathcal{L}[f](s) - F(0+)$, donde $F(t) = \int_a^t f(u)du$.
- $\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](s) = e^{-sa}\mathcal{L}[f(t)](s)$, si $H(t-a)f(t-a)$ está definido con $t > 0$, con $a \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{L}[f(t)](s-a) = \mathcal{L}[e^{at}f(t)](s)$. $a \in \mathcal{C}$.
- $\mathcal{L}[t^k](s) = \dfrac{k!}{s^{k+1}}$, $s > 0$, $k \geq 0$.
- $\mathcal{L}[f \star g](s) = \mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s)$
- $\dfrac{d\mathcal{L}[f(t)]}{ds} = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s)$
- $\int_0^s \mathcal{L}[f(t)](s) = -\mathcal{L}\Big[\dfrac{f(t)}{t}\Big](s) + \int_0^\infty \dfrac{f(t)}{t}dt$

P1.- Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales/integrales usando transformada de Laplace, asumiendo condiciones iniciales nulas donde aplique.

1. $x'' - x = \sin(3t)$.
2. $y^{(3)} - y' + 6y = \delta_5(t)$.
3. $y(t) = 3t + \int_0^t y(s)\sin(t-s)$.
4.

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} \delta_\omega(t) + H_{2\omega}(t) - H_{3\omega}(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pauta P1.-

1. Aplicando la transformada a la ecuación con condiciones iniciales nulas, tenemos que $\mathcal{L}[x''] = s^2\mathcal{L}[x]$, y recordando que $\mathcal{L}[\sin(3t)] = \dfrac{3}{s^2+3^2}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x](s)(s^2-1) &= \frac{3}{s^2+3^2} \\ \Rightarrow \mathcal{L}[x](s) &= \frac{3}{(s-1)(s+1)(s^2+3^2)} \end{aligned}$$

Nuestro objetivo ahora es encontrar la anti transformada del lado derecho. Para esto usaremos fracciones parciales. Como el polinomio s^2+3^2 tiene dos raíces complejas de multiplicidad 1, la descomposición es la siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x](s) &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+3^2} \\ &= \frac{3}{(s-1)(s+1)(s^2+3^2)} \end{aligned}$$

Hagamos algo mas inteligente que desarollar la suma e igualar coeficientes, multipliquemos por $(s-1)(s+1)(s^2+3^2)$

$$A(s+1)(s^2+3^2) + B(s-1)(s^2+3^2) + Cs(s^2-1) + D(s^2-1) = 3$$

Notemos que si evaluamos s en las raices, distintos términos se harán 0. Evaluando:

$$\begin{aligned} s = 1 \to 20A = 3 \to A &= \frac{3}{20} \\ s = -1 \to -20B = 3 \to B &= -\frac{3}{20} \\ s = 3i \to 3iC(-9-1) + D(-9-1) = -30iC - 10D = 3 \to C = 0, D &= -\frac{3}{10} \end{aligned}$$

Aplicamos ahora la anti transformada

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{10(s-1)} - \frac{3}{10(s+1)} + -\frac{3}{10(s^2+3^2)}\right](t) = \frac{3}{10}(e^{-t} - e^{t} + \sin(3t)),\ t > 0$$

2. Recordamos que una de las características principales del delta de dirac es que cumple que para cualquier función continúa f:

$$\delta[f] \equiv \int_{\mathbb{R}} \delta(t-t_0)f(t)dt = f(t-0)$$

. Con eso en mente, aplicamos la transformada de Laplace a la EDO:

$$\begin{aligned}
s^3\mathcal{L}[y](s) - s\mathcal{L}[y](s) + 6\mathcal{L}[y](s) &= \int_{\mathbb{R}} \delta(t-5)e^{-st}dt = e^{-5s} \\
\Rightarrow \mathcal{L}[y](s) &= \frac{e^{-5s}}{s^3 - s + 6} = \frac{e^{-5s}}{(s+2)(s^2-2s+3)} \\
&= \mathcal{L}\left[H(t-5)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)(s^2-2s+3)}\right](t-5)\right](s) \\
&\equiv \mathcal{L}[H(t-5)\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)](t-5)](s)
\end{aligned}$$

Busquemos la anti transformada de la función racional. Para esto, Podemos encontrar las anti transformadas de $F(s)$ y $G(s)$, y hacer la convolución:

$$\begin{aligned}
f(t) &\equiv \mathcal{L}^{-1}[F](t) = e^{-2t} \\
g(t) &\equiv \mathcal{L}^{-1}[G](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-2s+3}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+2}\right](t) \\
&= e^t\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2}\right] = e^t\frac{\sin\left(\sqrt{2}t\right)}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Hacemos la convolución entre f y g.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)](t) &= f(t) \star g(t) \\
&= \int_0^t f(t')g(t-t')dt' = \int_0^t e^{-2t'}e^{(t-t')}\frac{\sin\left(\sqrt{2}(t-t')\right)}{\sqrt{2}}dt' \\
&= e^t\int_0^t e^{-3t'}\frac{\sin\left(\sqrt{2}(t-t')\right)}{\sqrt{2}}dt'
\end{aligned}$$

Podemos integrar por partes dos veces para obtener el resultado, o trabajar con complejos y tomar la parte imaginaria:

$$\begin{aligned}
\frac{e^t}{\sqrt{2}}\int_0^t e^{-3t'}e^{\sqrt{2}i(t-t')}dt' &= \frac{e^{-t+\sqrt{2}it}}{\sqrt{2}}\int_0^t e^{(-3-\sqrt{2}i)t'}dt' \\
&= \frac{e^{t+\sqrt{2}it}}{\sqrt{2}}\frac{e^{(-3-\sqrt{2}i)t'}}{(-3-\sqrt{2}i)}\Bigg|_0^t \\
&= \frac{e^{t+\sqrt{2}it}}{\sqrt{2}}\frac{1}{(-3-\sqrt{2}i)}(e^{(-3-\sqrt{2}i)t}-1) \\
&= \frac{-3+\sqrt{2}i}{11\sqrt{2}}(e^{-2t}-e^{t+\sqrt{2}it}) \\
&= \frac{-3+\sqrt{2}i}{11\sqrt{2}}(e^{-2t}-e^t(\cos\left(\sqrt{2}t\right)+i\sin\left(\sqrt{2}t\right))) \\
&= \frac{1}{11\sqrt{2}}(-3e^{-2t}+3e^t\cos\left(\sqrt{2}t\right)-\sqrt{2}e^t\sin\left(\sqrt{2}t\right) \\
&+ i(\sqrt{2}e^{-2t}+\sqrt{2}e^t\cos\left(\sqrt{2}t\right)-3e^t\sin\left(\sqrt{2}t\right)))
\end{aligned}$$

Tomando parte imaginaria, obtenemos que

$$f(t)\star g(t) = \frac{1}{11}(e^{-2t}+e^t\cos\left(\sqrt{2}t\right)-\frac{3\sqrt{2}}{2}e^t\sin\left(\sqrt{2}t\right)))$$

Por lo que finalmente obtenemos que

$$y(t) = \frac{H(t-5)}{11}(e^{-2(t-5)}+e^{t-5}\cos\left(\sqrt{2}(t-5)\right)-\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{t-5}\sin\left(\sqrt{2}(t-5)\right)))$$

No es materia, pero a esta función se le llama la función de Green asociada al operador lineal $\mathfrak{L}$ (El operador diferencial tal que la EDO se puede escribir como $\mathfrak{L}[y](t) = \delta(x-t)$) con un impulso en $t' = 5$ y condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$, y se denota $G(t, 5)$.
La gracia de estas funciones $G(t, t')$ es que caracterizan la respuesta del sistema en presencia de una fuente puntual en t'. El significado "fuente puntual"depende del contexto. En una ecuación de movimiento por ejemplo, representa un golpe en un tiempo t' (Recordar que la parte no homogénea de una ecuación de movimiento es la fuerza en función del tiempo).
Esto se traduce en que es posible encontrar el comportamiento del sistema para cualquier conjunto de impulsos $f(t)$ (parte no homogénea). Si en multiplicamos la EDO $\mathfrak{L}G(t, t') = \delta(t-t')$ por una función $f(t)$ e integramos respecto a t', obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \mathfrak{L}G(t,t')f(t')dt' = \int f(t')\delta(t-t')dt' = f(t) \\
\mathfrak{L}\text{ solo actua en t} \Rightarrow \mathfrak{L}\int G(t,t')f(t')dt' = f(t) \\
\Rightarrow u_p(t) \equiv \int G(t,t')f(t')dt' \text{ es solución de } \mathfrak{L}u(t) = f(t)
\end{aligned}$$

3. Primero notemos que la integral en la expresión en la integral corresponde a la convolución

de $y(t)$ y $\sin(t)$, por lo que al aplicar $\mathcal{L}$ a la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y](s) &= \frac{3}{s^2} + \mathcal{L}[y](s)L[sin(t)](s) \\
&= \frac{3}{s^2} + \mathcal{L}[y](s)\frac{1}{s^2+1} \\
\Rightarrow \mathcal{L}[y](s)\Big(1 - \frac{1}{s^2+1}\Big) &= \mathcal{L}[y](s)\frac{s^2}{s^2+1} = \frac{3}{s^2} \\
\Rightarrow \mathcal{L}[y](s) &= \frac{3(s^2+1)}{s^4} = 3\Big(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}\Big) \\
\Rightarrow y(t) &= 3t + \frac{3}{3!}t^3,\ t > 0
\end{aligned}$$

4. Si tenemos un sistema lineal a coeficientes constantes de la forma $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}$, es posible aplicar la transformada de Laplace al sistema entero y obtener la siguiente ecuación:

$$s\mathcal{L}[\vec{X}](s) - \vec{X}_0 = A\mathcal{L}[\vec{X}](s) + \mathcal{L}[\vec{B}](s) \Rightarrow (sI - A)\mathcal{L}[\vec{X}](s) = \mathcal{L}[\vec{B}](s) + \vec{X}_0$$

Este sistema tendrá solución cuando s es mayor al máximo de los valores propios de A, pues cualquier otro intervalo contiene un punto donde la matriz no es invertible y el siguiente procedimiento no es válido. Multiplicando por la inversa de (sI-A), la transformada de la solución del sistema es:

$$\mathcal{L}[\vec{X}](s) = (sI - A)^{-1}(\mathcal{L}[\vec{B}](s) + \vec{X}_0)$$

Para nuestro problema, A tiene valores propios complejos $\pm i\omega$, por lo que el siguiente procedimiento es valido con $s \in \mathbb{R}$. Usando lo recién descrito, la transformada de la solución del del sistema es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\vec{X}](s) &= \begin{bmatrix} s & -\omega \\ \omega & s \end{bmatrix}^{-1} \mathcal{L}\begin{bmatrix} \delta_\omega(t) + H_{2\omega}(t) - H_{3\omega}(t) \\ 0 \end{bmatrix}(s) \\
\begin{bmatrix} s & -\omega \\ \omega & s \end{bmatrix}^{-1} &= \frac{1}{s^2+\omega^2}\begin{bmatrix} s & \omega \\ -\omega & s \end{bmatrix} \\
\mathcal{L}\begin{bmatrix} \delta_\omega(t) + H_{2\omega}(t) - H_{3\omega}(t) \\ 0 \end{bmatrix}(s) &= \begin{bmatrix} e^{-\omega s} + \dfrac{e^{-2\omega s}}{s} - \dfrac{e^{-3\omega s}}{s} \\ 0 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow \mathcal{L}[\vec{X}](s) &= \frac{1}{s^2+\omega^2}\begin{bmatrix} s & \omega \\ -\omega & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-\omega s} + \dfrac{e^{-2\omega s}}{s} - \dfrac{e^{-3\omega s}}{s} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s^2+\omega^2}\begin{bmatrix} se^{-\omega s} + e^{-2\omega s} - e^{-3\omega s} \\ -\omega e^{-\omega s} - \omega\dfrac{e^{-2\omega s}}{s} + \omega\dfrac{e^{-3\omega s}}{s} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Aplicamos la anti transformada (Cuidado con ignorar el término que está multiplicando

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{se^{-\omega s}}{s^2+\omega^2}\right](s) = H(t-\omega)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right](t-\omega) = H(t-\omega)\cos(\omega(t-\omega))$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2\omega s}}{s^2+\omega^2}\right](s) = H(t-2\omega)\sin(\omega(t-2\omega))$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3\omega s}}{s^2+\omega^2}\right](s) = H(t-3\omega)\sin(\omega(t-3\omega))$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\omega s}}{s^2+\omega^2}\right](s) = H(t-\omega)\sin(\omega(t-\omega))$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2\omega s}}{s(s^2+\omega^2)}\right](s) = H(t-2\omega)\frac{1}{\omega^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = H(t-2\omega)\frac{1-\cos(\omega(t-2\omega))}{\omega^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3\omega s}}{s(s^2+\omega^2)}\right](s) = H(t-3\omega)\frac{1-\cos(\omega(t-\omega))}{\omega^2}$$

$$\Rightarrow \vec{X} = \begin{bmatrix} H(t-\omega)\cos(\omega t) + H(t-2\omega)\sin(\omega t) - H(t-3\omega)\sin(\omega t) \\ -\omega H(t-\omega)\sin(\omega t) - H(t-2\omega)\dfrac{1-\cos(\omega t)}{\omega} + H(t-3\omega)\dfrac{1-\cos(\omega t)}{\omega} \end{bmatrix}$$

P2.-

1. Suponga que un cuerpo atado a un resorte tiene la siguiente ecuación de movimiento

$$x'' + 2x' + 2x = f(t)$$

Donde el cuerpo está en una posición de equilibrio en $t = 0$ con velocidad $x'(0) = 0$, y que el cuerpo está sujeto a un golpe de impulso unitario en $t = 1$ y desde $t = 2$ s hasta $t = 3$ s se le aplica una fuerza constante de magnitud $1N$. Determine la posición del cuerpo para todo instante.

2. Encontrar las anti transformadas de

   a) $\ln\left(\frac{s-3}{s+1}\right)$

   b) $\frac{1}{(1+s^2)^3}$. **Hint:** Encuentre primero la anti transformada de $\frac{s}{(1+s^2)^3}$, sabiendo que $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right](t) = \frac{1}{2}(\sin(t) - t\cos(t))$

Pauta P2.-

1. Traduciendo el enunciado, las condiciones iniciales son $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, y la fuerza consiste en el impulso unitario $\delta(t-1)$, y la fuerza que se aplica en un intervalo $H(t-3) - H(t-2)$, por lo que $f(t) = \delta(t-1) + H(t-3) - H(t-2)$. La solución se encuentra entonces de la manera

tradicional. Si lo desea, puede verificar que la formula de la función de Green funciona para este caso (Es un poco largo).

2. *a*) Si $\mathcal{L}[f](s) = \ln\left(\frac{s-3}{s+1}\right)$, al derivar tenemos que $\mathcal{L}[f]'(s) = -\mathcal{L}[tf](s) = \frac{4}{(s-3)(s+1)} = \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s+1}$. Aplicando anti transformada:

$$-tf(t) = e^{3t} - e^{-t} \Rightarrow f(t) = -\frac{1}{t}(e^{3t} - e^{-t})$$

b) Hagamos uso de la propiedad de la derivada de la transformada, y usemos el hint:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\frac{1}{(1+s^2)^2} &= \frac{-4s}{(1+s^2)^3} \\
\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(1+s^2)^3}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{-4}\frac{d}{ds}\frac{1}{(1+s^2)^2}\right](t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{-4}\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\frac{1}{2}(\sin(t) - t\cos(t))](s)\right](t) \\
&= \frac{t}{8}(\sin(t) - t\cos(t))
\end{aligned}$$

Ahora usamos la propiedad de la transformada de una integral:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(1+s^2)^3}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{s}{(1+s^2)^3}\right](t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathcal{L}[\frac{t}{8}(\sin(t) - t\cos(t))](s)\right](t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[\int_0^t \frac{t}{8}(\sin(t) - t\cos(t))dt](s) + 0\right](t) \\
&= \int_0^t \frac{t}{8}(\sin(t) - t\cos(t))dt \\
&= \frac{1}{8}(-(t^2-3)\sin(t) - 3t\cos(t))
\end{aligned}$$