Auxiliar 10: Preparación C3

Sistemas Lineales

Profesor: Roberto Cortez
Auxiliar: Miguel Sepúlveda

P1.-

1. Determine la solución general del sistema de ecuaciones:

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

2. Una nave espacial ha sido atrapada por la fuerza gravitacional de un planeta que se encuentra en el origen. La posición del cohete se rige por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix} X$$

   a) Encuentre la solución del sistema anterior en función del parámetro $b \in \mathbb{R}$

   b) ¿Para que valores de b la nave escapará de la atracción del planeta, independiente de la posición inicial $\vec{X}(0) \neq 0$? 'Escapar' significa que $||\vec{X}|| \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

Pauta P1

1. El polinomio característico es

$$\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -\lambda & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & -1\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1-\lambda\end{bmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{bmatrix}-1-\lambda & 0 & 0 & -1\\ -1 & -\lambda & 0 & -1\\ 0 & 0 & -\lambda & -1\\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda\end{bmatrix}$$

$$= (1-\lambda)((-1-\lambda)\det\begin{bmatrix}-\lambda & 0 & -1\\ 0 & -\lambda & -1\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{bmatrix}$$

$$-(-1)\det\begin{bmatrix}-1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix})$$

$$= (1-\lambda)((-1-\lambda)(-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda)+\lambda^2)$$

$$= (1-\lambda)\lambda^2((-1-\lambda)(1-\lambda)+1)$$

$$= \lambda^4(1-\lambda)$$

Así, tiene el valor propio $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica (y geometrica) 1, y el valor propio $\lambda_2 = 0$, con multiplicidad algebraica 4. Busquemos los vectores propios:
$\lambda_1 = 1$

$$\ker(A-I) = \ker\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \{X|AX=0\} = \{(x,y,z,w,v)|x-2y-v = x-y-z-v = -w-v = -x+y = 0\}$$

$$= \{(x,y,z,w,v)|x = y = -v = w = z\}$$

$$= \left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$\lambda_2 = 0$

$$\begin{aligned}
\ker(A) &= \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \{X | AX = 0\} = \{(x, y, z, w, v) | x = x - y - v = -v = -x + y + v = 0\} \\
&= \{(x, y, z, w, v) | x = 0, v = 0, y = 0\} \\
&= \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle
\end{aligned}$$

Por lo que la multiplicidad geométrica es 2. Como $\alpha_2 > \gamma_2$, esta matriz no es diagonalizable, y tendremos que hallar la forma de Jordan, y los vpg. El bloque de Jordan asociado a $\lambda_1 = 1$ es de 1×1 con 1 sub-bloque, pues $\alpha_1 = \gamma_1 = 1$ (El tamaño del bloque asociado corresponde a la multiplicidad algebraica), el bloque asociado a λ_2 es de tamaño 4. Calculemos entonces los rangos de las matrices $(A - 0I)^l$ para encontrar información sobre el largo de las cadenas de Jordan asociadas a 0.

$$\operatorname{rank} A = 5 - \dim \ker A = 3$$

$$\operatorname{rank} A^2 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$\operatorname{rank} A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 = n - \alpha_2 = 5 - 4 = 1 \text{ (Esto significa que nos podemos detener)}$$

$$\Rightarrow e_1 = \operatorname{rank} I - \operatorname{rank} A = 2,\ e_2 = \operatorname{rank} A - \operatorname{rank} A^2 = 1,\ e_3 = \operatorname{rank} A^2 - \operatorname{rank} A^3 = 1$$

Por lo que tenemos 2 vpg de rango 2, 1 vpg de rango 2 y 1 vpg de rango 3. Por lo que concluimos que hay una cadena de Jordan de rango 3, y una cadena de rango 1. Generemos la cadena de rango 3: Debemos encontrar un vector $\vec{v}_3 = (x, y, z, v, w)$ tal que $A^3\vec{v}_3 = 0$, pero $A^2\vec{v}_3 \neq 0$, esto impone $x = 0, -y - v \neq 0$, por lo que elegimos $\vec{v}_3 = (0, 1, 0, 0, 0)^T$. Ahora obtenemos los siguientes vectores de la cadena

$$\vec{v}_2 = A\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_1 = A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notemos que $v_1 = -(0,0,0,1,0)^T$, uno de los vectores propios asociados a 0 (Esto debe pasar). La cadena de largo 1 consiste solamente en el otro valor propio. Construimos ahora las matrices J y M tal que $A = MJM^{-1}$:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Estas se arman poniendo en columnas correspondientes los vpg (En orden creciente, con respecto al orden) y sub bloques de Jordan).
Debemos ahora encontrar la exponencial de la matriz, $e^{At} = Me^{Jt}M^{-1}$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & e^{J_3 t} & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}, J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{J_3 t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que la solución general es

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{C},\ \vec{C} \equiv M^{-1}\vec{X}(0)$$
$$= \begin{bmatrix} e^t & e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -t & 1 \\ 0 & -t & -t & -t^2/2 & t \end{bmatrix} \vec{C}$$

2. Expresemos la solución como

$$\vec{x}(t) = \sum_i C_i e_i^{\lambda_i t} \vec{v}_i$$

donde λ_i es el i-ésimo valor propio de la matriz del sistema A con $\vec{v}_i$ su vector propio asociado, y C_i son constantes que se pueden despejar de las condiciones iniciales. Ojo que esta forma de la solución solo sirve cuando la matriz es diagonalizable. Busquemos entonces sus valores propios

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} b-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & b-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & b-\lambda \end{bmatrix} = (b-\lambda)((b-\lambda)^2-1) = (b-\lambda)(\lambda^2 - 2b\lambda + b^2 - 1) = (b-\lambda)((b -$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = b+1, \lambda_3 = b-1$$

Busquemos ahora los vectores propios. Para λ_1:

$$\ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

Para λ_2:

$$\ker \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

Y para λ_3:

$$\ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

Así la solución es

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{bt} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{(b+1)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{(b-1)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para que el modulo de las tres soluciones homogéneas tiendan a infinito es necesario que $b > 1$.

$\boxed{\textbf{P2.-}}$ Sean $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ dos soluciones del sistema $\vec{X}'(t) = A(t)\vec{X}(t)$, donde $A(t)$ es una matriz continua. Muestre que si $\vec{x}_1(0)$ y $\vec{x}_2(0)$ son paralelos, entonces las dos soluciones son paralelos en todo $t \in \mathbb{R}$

Pauta P2

Debemos demostrar que $\vec{x}_1(t) = \lambda(t)\vec{x}_2(t)$, para algún $\lambda(t)$ real. Sea λ_0 tal que $\vec{x}_1(0) = \lambda_0\vec{x}_2(0)$. Veamos que $\vec{y}(t) \equiv \vec{x}_1(t) - \lambda_0\vec{x}_2(t)$ es una solución del sistema con condición inicial nula.

$$\begin{aligned} \vec{y}'(t) &= \vec{x}_1'(t) - \lambda_0\vec{x}_2'(t) = A(t)\vec{x}_1(t) - \lambda_0 A(t)\vec{x}_2(t) = A(t)\vec{y}'(t) \\ \vec{y}(0) &= \vec{x}_1(0) - \lambda_0\vec{x}_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Como $A(t)$ es continua, concluimos en virtud del teorema de existencia y unicidad que $\vec{x}_1(t) = \lambda_0\vec{x}_2(t)\forall t$, por lo que los vectores son siempre paralelos.

$\boxed{\textbf{P3.-}}$ Sea W anti simétrica ($W^T = -W$), de 3×3 y no nula. Sea $\vec{x}(t)$ la solución del sistema

$$X'(t) = WX(t)$$

1. Pruebe que $||x(t)||$ es una constante.
2. Demuestre que si $v \in \ker(W)$, no nulo, entonces $< x(t), v >$ no depende de t.
3. Pruebe que $x(t)$ se ubica en una circunferencia en $\mathbb{R}^3$

Pauta P3

1. $$\begin{aligned} \frac{d}{dt} < x(t), x(t) > &= 2 < x'(t), x(t) >= 2 < Wx(t), x(t) > \\ &= 2x^T(t)W^T x(t) = -2x^T(t)Wx(t) = -2 < x(t), Wx(t) > \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} < x(t), x(t) > &\equiv 0 \end{aligned}$$

   Concluimos entonces que el modulo de $x(t)$ es constante

2. $$\frac{d}{dt} < x(t), v > =< x'(t), v >= 2 < Wx(t), v >= -2 < x(t), Wv >= 0$$

3. La parte 1 nos dice que $x(t)$ se encuentra contenido en una esfera, pero la ecuación $< x(t), v >= cte$ nos dice que $x(t)$ se encuentre contenida en un plano, por lo que está está

en la intersección de ambos conjuntos, una circunferencia. Ahora solo debemos garantizar la existencia de $v \in \ker W$ no nulo. Es decir que W no es invertible. Veamos entonces que $\det W = 0$. En efecto

$$\det W = \det W^T = \det -W = (-1)^3 \det W \Rightarrow \det W = 0$$

Por lo que concluimos que v existe.