

Cosas útiles de álgebra lineal

Profesora: Salomé Martínez

Auxiliares: Sebastian Barbieri, Edgardo Matthies

I. En $\mathbb{R}^n$, se define el producto punto entre 2 vectores como sigue:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^T y = y^T x$$

que satisface las siguientes propiedades:

- a) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$
- b) $\langle \vec{x}, \vec{y} + \lambda \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \lambda \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$
- c) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ con $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$

A partir del producto punto se define la norma de un vector como:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

Puede ser útil recordar que:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2$$

Sean ahora $\vec{x}, \vec{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, diferenciables. Calculemos la derivada de la siguiente función: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = \langle \vec{x}(t), \vec{y}(t) \rangle$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)' = \left(\sum_{i=1}^n x_i(t) y_i(t) \right)' = \sum_{i=1}^n (x'_i(t) y_i(t) + x_i(t) y'_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i(t) y_i(t) + \sum_{i=1}^n x_i(t) y'_i(t) = \langle \vec{x}'(t), \vec{y}(t) \rangle + \langle \vec{x}(t), \vec{y}'(t) \rangle \end{aligned}$$

En particular se tiene que si $g(t) := \langle \vec{x}(t), \vec{x}(t) \rangle \implies g'(t) = \langle \vec{x}'(t), \vec{x}(t) \rangle + \langle \vec{x}(t), \vec{x}'(t) \rangle = 2\langle \vec{x}(t), \vec{x}'(t) \rangle$

Por otra parte se tiene que $g(t) = \|\vec{x}(t)\|^2 \implies g'(t) = 2\|\vec{x}(t)\| \|\vec{x}(t)\|'$ por lo que deducimos que:

$$\|\vec{x}(t)\|' = \frac{\langle \vec{x}(t), \vec{x}'(t) \rangle}{\|\vec{x}(t)\|}$$

lo anterior tiene sentido ($\forall t \in \mathbb{R}$) tal que $\vec{x}(t) \neq \vec{0}$

II. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, i.e. una matriz cuadrada con coeficientes reales, se dice que A es:

- a) simétrica ssi $A^T = A$
- b) antisimétrica ssi $A^T = -A$
- c) diagonal ssi $a_{ij} = 0 \quad (\forall i \neq j)$
- d) triangular superior ssi $a_{ij} = 0 \quad (\forall i > j)$
- e) triangular inferior ssi $a_{ij} = 0 \quad (\forall i < j)$

- f) invertible ssi $(\exists B \in \mathbb{R}^{n \times n})$ tal que $AB = BA = I_{n \times n}$
- g) definida positiva ssi $x^T A x > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$
- h) definida negativa ssi $x^T A x < 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$
- i) semi definida positiva ssi $x^T A x \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$
- j) semi definida negativa ssi $x^T A x \leq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$
- k) diferenciable ssi todas sus componentes son funciones diferenciables

Se puede probar de manera similar al producto punto que el producto de matrices diferenciables también satisface la regla de derivación clásica del producto, i.e.

$$(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$$

La función determinante $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las siguientes propiedades:

- a) $\det(A) = 0$ ssi A es invertible, en tal caso se tiene además que $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
- b) Si A es triangular superior o inferior, entonces $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$
- c) $\det(A) = \det(A^T)$
- d) $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- e) el determinante es lineal por filas
- f) el determinante es lineal por columnas
- g) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
- h) si A es diferenciable, entonces $\det(A)$ y se cumple que: $\det'(A) = \sum_{i=1}^n A'_i$, donde A'_k es la matriz que resulta de derivar solamente la fila k (o la columna k , es indiferente)

Diremos que $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ es vector propio de A ssi $(\exists \lambda \in \mathbb{R})$ tal que:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

en tal caso diremos que λ es valor propio de A , y que $\vec{v}$ está asociado al valor propio λ

proposición: λ es valor propio de A ssi $\det(A - \lambda I) = 0$

proposición: A es definida positiva ssi todos sus valores propios son estrictamente positivos, análogamente para definida negativa, semi definida positiva y semi definida negativa

Dado un valor propio λ , el conjunto de los vectores propios asociados a λ son los $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ que verifican:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

es decir dicho conjunto es $\ker(A - \lambda I)$, por lo que es sub espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y lo llamaremos sub espacio propio asociado al valor propio λ

Diremos que A es diagonalizable ssi $\exists P, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con D una matriz diagonal tales que:

$$A = PDP^{-1}$$

proposición: Si A es diagonalizable entonces $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, donde los λ_i son los valores propios de A , y además $P = (\vec{v}_1 \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n)$, donde los v_i forman una base de $\mathbb{R}^n$ y v_i es vector propio asociado al valor propio λ_i (en ese mismo orden)

proposición: si los valores propios de A son todos distintos, entonces A es diagonalizable

proposición: si A es simétrica, entonces es diagonalizable, todos sus valores propios son números reales y los sub espacios propios asociados a valores propios distintos son ortogonales