Auxiliar 9: Transformada de Laplace

Exponencial de matriz en forma de Jordan y transformada de Laplace

Profesor: Roberto Cortez
Auxiliar: Miguel Sepúlveda

P1.- Sea

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz en forma de Jordan. Encuentre la matriz fundamental del sistema homogéneo $\vec{X}(t) = J\vec{X}$.

Pauta P1.- Recordemos que si una matriz es diagonal por bloques (Como J), entonces su exponencial se obtiene buscando los exponenciales de los bloques:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & M_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^M = \begin{bmatrix} e^{M_1} & & & \\ & e^{M_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & e^{M_n} \end{bmatrix}$$

Sabiendo que para J los M_i corresponden a los bloques de Jordan, encontrar la matriz se puede hacer de forma automática, gracias al siguiente desarrollo. Todas los bloques de Jordan en una matriz en forma de Jordan de $m \times m$ se pueden descomponer como $J_i = \lambda_i I + N_i$, donde N_i es una matriz nilpotente, y λ_i es el valor propio asociado a este bloque. Como estas matrices conmutan, tenemos que $e^{(\lambda_i I + N)t} = e^{\lambda_i I} e^{N_i t} = e^{\lambda} e^{Nt}$. Aprovechando que N_i es nilpotente, se obtiene la formula para la exponencial del bloque:

$$e^{J_i} = e^{(\lambda_i I + N_i)t} = e^{\lambda_i I} e^{N_i t} = e^{\lambda_i} e^{N_i t} = e^{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & 1 & t & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso, los bloques de Jordan son los siguientes:

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto tenemos que su exponencial (Y la matriz fundamental del sistema) es

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & e^0 e^{N_3 t} & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P2.-

1. Justifique la existencia de $\mathcal{L}[t^k](s)$, y demuestre que $\mathcal{L}[t^k](s) = \frac{k!}{s^{k+1}}, s > 0$.
2. Demuestre que si $f \in C_\alpha$, entonces $\mathcal{L}[f(t)](s-a) = \mathcal{L}[e^{at}f(t)](s)$.
3. Calcule la transformada de $f(x) = x^2 \cos x$
4. Calcule la transformada de $f(t) = e^{-t}P_{ab}(t)$, con $0 \leq a < b$.

Pauta P2.- Es posible encontrar muchas transformadas usando las propiedades de la transformada de laplace junto con algunas transformadas conocidas. Sea $f \in C_\alpha$:

- $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}, a \in \mathbb{C}$, para $s > \mathrm{Re}(a)$.
- El operador $\mathcal{L}$ es lineal.
- $\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n[f](s) - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1} f^{(n-k)}(0^+)$, para $s > \alpha$.
- $\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](s) = e^{-sa}\mathcal{L}[f(t)](s)$, si $H(t-a)f(t-a)$ está definido con $t > 0$, con $a \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{L}[f(t)](s-a) = \mathcal{L}[e^{at}f(t)](s)$. Esto sirve con a complejo.

1. Hagamoslo por inducción. con $k = 0$, tenemos que $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$, por lo que se cumple el caso base. Para k cualquiera

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^k](s) &= \int_0^\infty e^{-st}t^k dt = t^k \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^{k-1}dt \\ \text{H.I.} \Rightarrow &= -\frac{k}{s}\lim_{t\to\infty} t^k e^{-st} + \frac{1}{s}\frac{(k-1)!}{s^k} \\ t^k \text{ de orden exponencial} \Rightarrow &= \frac{k!}{s^{k+1}} \end{aligned}$$

Por lo que concluimos el resultado.

2. trivial c:

3. Busquemos la transformada de x^2e^{ix}. Por la linealidad de la transformada de laplace, lo que buscamos será su parte real.

$$\mathcal{L}[x^2e^{ix}](s) = \mathcal{L}[x^2](s-i) = \frac{2!}{(s-i)^3} = 2\frac{(s+i)^3}{(s^2+1)^3} = 2\frac{(s^3-3s+i(3s^2-1))}{(s^2+1)^3}$$
$$\Rightarrow \operatorname{Re} L[x^2e^{ix}](s) = \mathcal{L}[\operatorname{Re}(x^2e^{ix})](s) = \mathcal{L}[x^2\cos x] = 2\frac{s^3-3s}{(s^2+1)^3}$$

4.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-t}P_{ab}(t)](s) &= \mathcal{L}[P_{ab}(t)](s+1) = \mathcal{L}[H(t-a)-H(t-b)](s+1)\\ &= e^{-sa}\mathcal{L}[1](s+1) - e^{-sb}\mathcal{L}[1](s+1) = \frac{e^{-sa}}{s+1} - \frac{e^{-sb}}{s+1}\end{aligned}$$

P3.- Una viga horizontal de largo L es sometida a una fuerza vertical F a lo largo del eje $x \in [0, L[$. La deformación y puede ser calculada con la ecuación de 4to grado:

$$y^{(4)} = F(x) = \begin{cases} a\left(\frac{L}{2}-x\right) & x \in \left[0, \frac{L}{2}\right] \\ 0 & x \in \left(\frac{L}{2}, L\right] \end{cases}$$

Con $a > 0$ y con condiciones de borde

$$y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$$

Pauta P3.- Podemos reescribir la expresión para F en términos de la función escalón:

$$F(x) = H\left(\frac{L}{2}-x\right)a\left(\frac{L}{2}-x\right)$$

Aplicamos la transformada a los lados de la ecuación:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y^{(4)}](s) &= s^4\mathcal{L}[y](s) - (y'''(0^+) + sy''(0^+)s^2y'(0^+) + s^3y(0^+)) = s^4\mathcal{L}[y](s)\\ \mathcal{L}[F](s) &= \mathcal{L}\Big[H\Big(\frac{L}{2}-x\Big)a\Big(\frac{L}{2}-x\Big)\Big](s) = \mathcal{L}\Big[-\Big(1-H\Big(x-\frac{L}{2}\Big)\Big)a\Big(x-\frac{L}{2}\Big)\Big](s)\\ &= -\mathcal{L}\Big[a\Big(x-\frac{L}{2}\Big)\Big](s) + \mathcal{L}\Big[H\Big(x-\frac{L}{2}\Big)\Big)a\Big(x-\frac{L}{2}\Big)\Big](s)\\ &= -a\mathcal{L}[x](s) + \frac{aL}{2}\mathcal{L}[1](s) + ae^{-s\frac{L}{2}}\mathcal{L}[x](s)\\ &= -a\frac{1}{s^2} + \frac{aL}{2s} + \frac{ae^{-s\frac{L}{2}}}{s^2}\\ \Rightarrow \mathcal{L}[y](s) &= -a\frac{1}{s^6} + \frac{aL}{2}\frac{1}{s^5} + a\frac{e^{-s\frac{L}{2}}}{s^6}\end{aligned}$$

Es posible recuperar la solución con lo que sabemos! Sabemos que $\mathcal{L}[x^5] = \frac{5!}{s^6}$, que $\mathcal{L}[x^4] = \frac{4!}{s^5}$. Por propiedad de traslación y por lo anetrior, sabemos que $\mathcal{L}[H(x-L/2)(x-L/2)^5] = \frac{5!e^{-s\frac{L}{2}}}{s^6}$. Como la igualdad producto de la ecuación diferencial es válida para todo $s > 0$, entonces por el Teorema de la igualdad de transformadas, concluimos que

$$y(x) = -a\frac{x^5}{5!} + \frac{aL}{2}\frac{x^4}{4!} + a\frac{H(x-L/2)(x-L/2)^5}{5!}, x \in [0, L[$$

P4.- Resuelva el siguiente sistema usando transformada de Laplace, con $t > 0$

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$$

Pauta P4.- Aplicando transformada de Laplace:

$$s^2\mathcal{L}[y](s) - sy'(0) - y(0) - 4(s\mathcal{L}[y](s) - y(0)) + 2\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[e^{2t}](s)$$

Aplicando las condiciones iniciales, y con $\mathcal{L}[e^{2t}](s) = \frac{1}{s-2}$:

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{s-3}{(s-2)^2} + \frac{1}{(s-2)^3}$$

También podemos encontrar explícitamente una expresión para y, aplicando estrategias similares a la parte anterior.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{(s-2)^3}\Big](t) &= e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s^3}\Big](t) = e^{2t}\frac{t^2}{2} \\
\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{s-3}{(s-2)^2}\Big](t) &= \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{s-2-3}{(s-2)^2}\Big](t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{(s-2)}\Big](t) - \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{(s-2)^2}\Big](t) \\
&= e^{2t} - te^{2t}
\end{aligned}$$

Así, concluimos que para $t > 0$

$$y(t) = e^{2t}\Big(\frac{t^2}{2} - t + 1\Big)$$