Auxiliar 8: Resolución de Sistemas de Lineales

Exponente de una matriz y resolución de sistemas lineales

Profesor: Roberto Cortez
Auxiliar: Miguel Sepúlveda

P1.- Sean A y B matrices cuadradas.

1. Demuestre que si $AB = BA$, entonces $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}, \forall t \in \mathcal{R}$. Recuerde que si $AB = BA$, entonces $Be^{At} = e^{At}B$

2. Si A es una matriz nilpotente de índice k, encuentre una expresión para e^{At}

3. Resuelva el sistema para $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix}$ usando lo anterior. **Hint:** Recuerde que todas las matrices triangulares con 0s en su diagonal son nilpotentes.

Pauta.-

1. Hagamos la vieja táctica: definamos $\phi(t) = e^{At}e^{Bt} - e^{(A+B)t}$ y veamos que es la matriz fundamental de soluciones del sistema lineal $\vec{X}' = (A+B)X$ con condiciones iniciales nulas. Primero, tenemos que $\phi(0) = 0$, y que $\phi'(t) = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} - (A+B)e^{(A+B)t} = Ae^{At}e^{Bt} + Be^{At}e^{Bt} - (A+B)e^{(A+B)t} = (A+B)(e^{At}e^{Bt} + e^{At}e^{Bt} - e^{(A+B)t}) = (A+B)\phi(t)$, por lo que concluimos por teorema de existencia y unicidad que $\phi(t) \equiv 0$.

2. Usando la definición del exponencial de una matriz, y el hecho de que $A^j = 0, \forall j \geq k$, tenemos que

$$e^{At} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j t^j}{j!} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{A^j t^j}{j!}$$

3. Recordemos que la solución de esta ecuación homogénea está dada por la siguiente expresión:

$$\vec{X}(t) = \Phi(t)\vec{X}_0 = e^{A(t-0)}\vec{X}_0$$

Por lo que el problema se reduce a calcular e^{At}. Para esto usaremos el hint, y la propiedad que nos dice que $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ **si y solo si** $AB = BA$. Descomponemos entonces la matriz A

en una matriz triangular con 0s en su diagonal y una matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Ahora, para poder usar esta propiedad, se debe verificar que las dos matrices conmutan:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Como conmutan, basta entonces con calcular los exponenciales de ambas matrices y multiplicar. Para esto, veamos el índice de la matriz triangular:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Por lo que la matriz triangular es de índice $k = 2$. Calculamos ahora los exponenciales

$$e^{\begin{bmatrix} at & 0 & 0 \\ 0 & at & 0 \\ 0 & 0 & at \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 & 0 \\ 0 & e^{at} & 0 \\ 0 & 0 & e^{at} \end{bmatrix} = e^{at} I$$

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ at & 0 & 0 \\ 0 & at & 0 \end{bmatrix}} = I + t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}^2$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ at & 1 & 0 \\ \frac{(at)^2}{2} & at & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando estos resultados obtenemos la matriz canónica fundamental de soluciones

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 & 0 \\ e^{at} at & e^{a} t & 0 \\ e^{at} \frac{(at)^2}{2} & e^{at} at & e^{at} \end{bmatrix}$$

Por lo que consideramos el sistema resuelto, pues basta con multiplicar la matriz fundamental

con las condiciones iniciales.

P2.-

1. Demuestre que si P es una matriz invertible, entonces $e^{PDP^{-1}t} = Pe^{Dt}P^{-1}$
2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_3 + e^t \\ y_2' &= -2y_2 + y_3 \\ y_3' &= -y_3 \\ y_1(0) &= c_1 \\ y_2(0) &= c_2 \\ y_3(0) &= c_3 \end{aligned}$$

Encuentre la solución general del sistema.

Pauta.-

1. Usando la definición de exponencial de una matriz

$$\begin{aligned} e^{PDP^{-1}t} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(PDP^{-1})^j t^j}{j!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{PDP^{-1}PDP^{-1}\cdots PDP^{-1}t^j}{j!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{PD^jP^{-1}t^j}{j!} \\ &= P(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{D^jt^j}{j!})P^{-1} = Pe^{Dt}P^{-1} \end{aligned}$$

2. Al transformar el sistema a notación matricial obtenemos el siguiente sistema no homogéneo.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Para reslolver este sistema, debemos usar la fórmula de variación de parámetros:

$$\vec{X}(t) = \Phi(t)\vec{X}_0 + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)\vec{B}(s)ds$$

Donde $\Phi(t)$ es la matriz fundamental de soluciones, X_0 son las condiciones iniciales, y $\vec{B}$ es la parte no homogénea de esta ecuacion. Recordemos que es posible encontrar la matriz fundamental con el exponencial de la matriz del sistema.
Resolveremos este sistema diagonalizando la matriz asociada (llamemosla A), y usando que si

la matriz A se puede descomponer de la forma $A = PDP^{-1}$, donde P es la matriz que tiene los vectores propios de A como columnas, y D tiene los valores propios correspondientes en su diagonal, entonces tendremos que $e^{PDP^{-1}} = Pe^{D}P^{-1}$. Lo cierto es que no podemos saber si la matriz es diagonalizable hasta que sepamos la multiplicadad geométrica y algebraica de sus valores propios.
Primero busquemos sus valores propios buscando los valores λ para los cuales $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \\
&\Rightarrow (1-\lambda)(-2-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \\
&\Rightarrow \lambda_1 = 1 \ \lambda_2 = -2 \ \lambda_3 = -1
\end{aligned}$$

El determinante se puede calcular de la manera usual, o recordar que el determinante de las matrices triangulares es la multiplicación de los elementos de su diagonal.
Recordemos el siguiente trabalenguas: La multiplicidad geométrica de un valor propio es la dimensión del espacio generado por los vectores propios asociados a este valor propio. Como cada valor propio debe tener al menos un vector propio asociado, la mínima multiplicidad algebraica es 1 para un valor propio dado. Además recordemos que si la suma de las multiplicidades geométricas es igual a la dimensión de la matriz, o las multiplicidades algebraicas son iguales a las geométricas, entonces esta es diagonalizable.
Por esto concluimos que al haber tres valores propios, cada uno debe tener multiplicada geométrica igual a 1, y como cada uno tiene multiplicidad algebraica igual a 1, concluimos que la matriz es diagonalizable. Busquemos entonces los vectores propios de cada valor propio, encontrando las bases de $\ker(A - \lambda_i I)$. Recordemos que para buscar el núcleo de una matriz

debemos encontrar los vectores $\vec{v}$ que satisfacen $(A - \lambda_i I)\vec{v} = 0$.

$$\lambda_1 = 1 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow z = 0, y = 0, x$ es libre, siempre quedará un número de variables libres igual al kernel de la matriz

$$\Rightarrow \ker(A - I) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\lambda_2 = -2 : \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow z = 0, 3x + z = 0, y$ libre.

$$\Rightarrow \ker(A + 2I) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\lambda_3 = -1 : \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow -y + z = 0, 2x + z = 0, x$ libre

$$\Rightarrow \ker(A + I) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Así, tenemos que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculamos ahora la matriz fundamental:

$$\begin{aligned}
\Phi(t) = e^{At} = e^{PDP^{-1}t} &= Pe^{Dt}P^{-1} \\
&= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2e^{t} & 0 & -e^{t}\\ 0 & -2e^{-2t} & 2e^{-2t}\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2e^{t} & 0 & e^{-t}-e^{t}\\ 0 & -2e^{-2t} & 2e^{-2t}-2e^{-t}\\ 0 & 0 & -2e^{-t}\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}e^{t} & 0 & \dfrac{e^{t}-e^{-t}}{2}\\ 0 & e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Debemos encontrar la inversa de Φ para encontrar la solución particular

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix}e^{-t} & 0 & \dfrac{e^{-t}-e^{t}}{2}\\ 0 & e^{2t} & e^{t}-e^{2t}\\ 0 & 0 & e^{t}\end{bmatrix}$$

Ahora calculamos la solución particular $\Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)\vec{B}(s)ds$

$$\begin{aligned}
\Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)\vec{B}(s)ds &= \begin{bmatrix}e^{t} & 0 & \dfrac{e^{t}-e^{-t}}{2}\\ 0 & e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix}e^{-s} & 0 & \dfrac{e^{-s}-e^{s}}{2}\\ 0 & e^{2s} & e^{s}-e^{2s}\\ 0 & 0 & e^{s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{s}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}ds \\
&= \begin{bmatrix}e^{t} & 0 & \dfrac{e^{t}-e^{-t}}{2}\\ 0 & e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}ds = \begin{bmatrix}e^{t} & 0 & \dfrac{e^{t}-e^{-t}}{2}\\ 0 & e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}te^{t}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente, expresamos la solución al sistema

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ y_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{t} & 0 & \dfrac{e^{t}-e^{-t}}{2}\\ 0 & e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}te^{t}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

P3.-

1. Demuestre que si una matriz real A tiene como valor propio un complejo λ, con vector propio correspondiente $\vec{v}$, entonces $\bar{\lambda}$ también es un valor propio con vector propio $\overline{\vec{v}}$

2. Sea A una matriz de 3×3 tal que

$$\ker(A - I) = \langle\{(1, 0, 0)\}$$
$$\ker(A - (1 - 2i)I) = \langle\{(1 + 5i, 1 - i, 2)\}$$

   Exprese la solución general del sistema homogéneo $\vec{X}(t) = A\vec{X}$ con condición inicial $\vec{X}(0) = (1, 1, 0)$

Pauta.-

Parece un problema distinto, pero el enunciado nos ha ahorrado pasos, pues nos dio todos los valores propios con sus repectivos valores propio (Usando la parte anterior encontramos el tercero). Así, tenemos la descomposicion PDP^{-1} de la matriz de inmediato:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1+5i & 1-5i \\ 0 & 1-i & 1+i \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2i & 0 \\ 0 & 0 & 1+2i \end{bmatrix}$$

La gran trampa de este problema es el hecho de que estamos tratando con complejos, y no reales. Pero tomemos en cuenta que $\vec{X}_0$ y A son matrices reales, por lo que la solución SIEMPRE será real, por muy *compleja* que sea la expresión.

De una manera alternativa a la anterior, podemos expresar la solución de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) &= Pe^{Dt}P^{-1}\vec{X}_0 \equiv Pe^{Dt}\vec{C} \\ &= C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + C_1 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 + \cdots + C_1 e^{\lambda_n t}\vec{v}_n \\ &= C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{t(1-2i)} \begin{bmatrix} 1+5i \\ 1-i \\ 2 \end{bmatrix} + C_3 e^{t(1+2i)} \begin{bmatrix} 1-5i \\ 1+i \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde las constantes se encuentran invirtiendo P

$$\begin{aligned} \vec{X}(0) = Pe^{D0}\vec{C} \Rightarrow \vec{C} &= P^{-1}\vec{X}(0) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & i/2 & 1/4 - i/4 \\ 0 & -i/2 & 1/4 + i/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 \\ i/2 \\ -i/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

No hay que asustarse! Hay que tener fe:

$$\begin{aligned}
\vec{X}(t) &= 6e^t \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{i}{2}e^{t(1-2i)}\begin{bmatrix}1+5i\\1-i\\2\end{bmatrix} - \frac{i}{2}e^{t(1+2i)}\begin{bmatrix}1-5i\\1+i\\2\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6e^t + \dfrac{ie^t}{2}(e^{-2t}(1+5i) - e^{2t}(1-5i)) \\ \dfrac{ie^t}{2}(e^{-2t}(1-i) - e^{2t}(1+i)) \\ ie^t(e^{-2t} - e^{2t}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6e^t + \dfrac{ie^t}{2}((e^{-2t} - e^{2t}) + 5i(e^{-2t} + e^{2t})) \\ \dfrac{ie^t}{2}((e^{-2t} - e^{2t}) - i(e^{-2t} + e^{2t}) \\ ie^t(e^{-2t} - e^{2t}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6e^t + ie^t(-i\sin(2t) + 5i\cos(2t)) \\ ie^t(-i\sin(2t) - i\cos(2t)) \\ -ie^t i\sin(2t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6e^t + e^t(\sin(2t) - 5\cos(2t)) \\ e^t(\sin(2t) + \cos(2t)) \\ e^t\sin(2t) \end{bmatrix} \\
&= e^t \begin{bmatrix} 6 + \sin(2t) - 5\cos(2t) \\ \sin(2t) + \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

P4.- Encuentre la forma canónica de Jordan J para la matriz A, y además encuentre la matriz M tal que $A = MJM^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Pauta.-

Algunas definiciones:

Un vector propio generalizado de rango k de la matriz A asociado al valor propio λ es un vector $\vec{v}$ tal que $(A-\lambda I)^k\vec{v} = 0$ pero $(A-\lambda I)^{k-1}\vec{v} \neq 0$

La cadena de Jordan generada por un vector $\vec{v}_m$ de rango i es un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m\}$ tales dados por

$$\vec{v}_j = (A-\lambda I)\vec{v}_{j+1} = (A-\lambda I)^{m-j}\vec{v}_m$$

Pasos para encontrar la forma canónica de una matriz A de $n \times n$:

1. Encontrar los valores propios de la matriz.
2. Para cada valor propio λ, y encontrar el primer valor k tal que $\text{rank}(A-\lambda I)^k = n - \alpha$, donde α es la multiplicidad algebraica del valor propio. El tamaño de todos los bloques de Jordan asociados a λ es α

3. Encontrar los valores de $e_m = \text{rank}(A-\lambda I)^{m-1} - \text{rank}(A-\lambda I)^m$, con $m = 1, \cdots, k$. Estos números nos dicen el numero de vectores propios generalizados de rango m y como consecuencia, el número de sub-bloques de Jordan de tamaño a lo menos m (Pues cada sub-bloque esta asociado a una cadena de Jordan completa). Es más, el numero exacto es $l_m = \text{rank}(A-\lambda I)^{j+1} + \text{rank}(A-\lambda I)^{j-1} - 2\,\text{rank}(A-\lambda I)^j$.

4. Encontramos las cadenas de Jordan en base a esta información.

5. Llenamos la matriz M con las cadenas encontradas como sus columnas (cuidado con el orden, una cadena va en orden ascendente con respecto al rango) y la matriz J de acuerdo con la información de los bloques y sub-bloques encontrada previamente.

   Busquemos entonces los valores propios:

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow & \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & -3 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \\ & \Rightarrow -\lambda(-\lambda(3-\lambda)+3)+1 = 0 \\ & \Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \\ & \Rightarrow (1-\lambda)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \end{aligned}$$

   Solo tenemos un valor propio. El rango de $(A-I) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ es 2, pues se puede generar una de las columnas con las otras dos. Esto significa que la multiplicidad geométrica del valor propio es 1, pues $\dim\ker(A-I) = n - \text{rank}(A-I) = 3-2 = 1$. Concluimos entonces que la matriz no es diagonalizable, y tenemos que encontrar la forma de Jordan. Busquemos el valor de k tal que $\text{rank}(A-I)^k = n - \alpha = 3-3 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{rank}(A-I)^2 &= \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \\ \text{rank}(A-I)^3 &= \text{rank}\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

   Así, tenemos que $k = 3$, $e_1 = \text{rank}(A-I)^0 - \text{rank}(A-I)^1 = 3-2 = 1$, $e_2 = \text{rank}(A-I)^1 - \text{rank}(A-I)^2 = 2-1 = 1$, $e_3 = \text{rank}(A-I)^2 - \text{rank}(A-I)^3 = 1-0 = 1$. Esto nos dice que hay 1 vector propio generalizado asociado al valor propio $\lambda = 1$ de rango 1, 1 de rango 2 y 1 de rango 3 (Esta es la información que buscamos de todo este proceso). Saber cuantos vectores propios generalizados hay de cada rango es suficiente para encontrarlos y para encontrar la forma de Jordan, pues se obtienen de las cadenas de Jordan que generan vectores propios generalizados, y cada sub-bloque de la forma de Jordan está asociado a una (Esto es lo mas importante que deben entender para poder encontrar la forma de Jordan y los VPG). En este caso tendremos una sola cadena de Jorden con tres vectores, y por lo tanto

solo un sub-bloque. La forma de Jordan de A entonces es

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora vamos a encontrar la cadena de Jordan de largo 3. Primero debemos encontrar un vector propio generalizado $\vec{v}_3$ de rango 3, es decir, debe cumplir que $(A-I)^3\vec{v} = 0$ y $(A-I)^2\vec{v}_3 \neq 0$. Como $(A-I)^3\vec{v}_3 = 0$, basta con escoger cualquier vector que cumpla que $(A-I)^2 v_3 \neq 0$. Si $\vec{v}_3 = (x, y, z)$, entonces esta condición es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z &\neq 1 \\ -2(x + y + z) &\neq 1 \end{aligned}$$

Como se observa, hay muchas opciones para esto. Tomemos $x = z = 1$, e $y = 0$. Completamos la cadena de Jordan:

$$\begin{aligned} \vec{v}_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{v}_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \vec{v}_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Y finalmente expresamos la matriz M tal que $A = MJM^{-1}$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Notemos que $\vec{v}_1$ es un vector propio de la matriz con valor propio 1. Esto se debe a que es un vector propio generalizado de rango 1