Auxiliar 8: Resolución de Sistemas de Lineales

Exponente de una matriz y resolución de sistemas lineales

Profesor: Roberto Cortez
Auxiliar: Miguel Sepúlveda

P1.- Sean A y B matrices cuadradas.

1. Demuestre que si $AB = BA$, entonces $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}, \forall t \in \mathcal{R}$. Recuerde que si $AB = BA$, entonces $Be^{At} = e^{At}B$

2. Si A es una matriz nilpotente de índice k, encuentre una expresión para e^{At}

3. Resuelva el sistema para $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix}$ usando lo anterior. **Hint:** Recuerde que todas las matrices triangulares con 0s en su diagonal son nilpotentes.

P2.-

1. Demuestre que si P es una matriz invertible, entonces $e^{PDP^{-1}t} = Pe^{Dt}P^{-1}$

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_3 + e^t \\ y_2' &= -2y_2 + y_3 \\ y_3' &= -y_3 \\ y_1(0) &= c_1 \\ y_2(0) &= c_2 \\ y_3(0) &= c_3 \end{aligned}$$

Encuentre la solución general del sistema.

P3.-

1. Demuestre que si una matriz real A tiene como valor propio un complejo λ, con vector propio correspondiente $\vec{v}$, entonces $\bar{\lambda}$ también es un valor propio con vector propio $\bar{\vec{v}}$

2. Sea A una matriz de 3×3 tal que

$$\ker(A - I) = \langle \{(1, 0, 0)\}$$
$$\ker(A - (1 - 2i)I) = \langle \{(1 + 5i, 1 - i, 2)\}$$

Exprese la solución general del sistema homogéneo $\vec{X}(t) = A\vec{X}$ con condición inicial $\vec{X}(0) = (1, 1, 0)$

P4.- Encuentre la forma canónica de Jordan J para la matriz A, y además encuentre la matriz M tal que $A = MJM^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$