Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-3 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Auxiliar 7: Sistemas Lineales

Sistemas lineales y existencia y unicidad

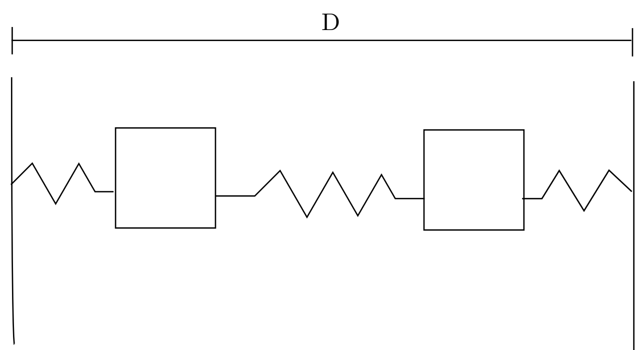
Profesor: Roberto Cortez
Auxiliar: Miguel Sepúlveda

P1.-

1. Represente la siguiente ecuación diferencial como un sistema lineal:

$$x'' + 2x' - 3x = \cos(t)$$

2. Exprese las ecuaciones de movimiento de una cadena de extremos fijos con 2 masas conectadas por resortes de constante elástica k y largo natural $D/3$, y convierta este sistema a un sistema matricial de orden 1.



Pauta:

1. En clases se vio que es posible representar cualquier ecuación diferencial lineal como un sistema lineal de orden uno; para esto, hacemos el siguiente cambio de variable (Que no es realmente necesario si no que ayuda a visualizar):

$$x = x, x' = u$$

La idea es representar las relaciones entre x, u y t con tres ecuaciones diferenciales:

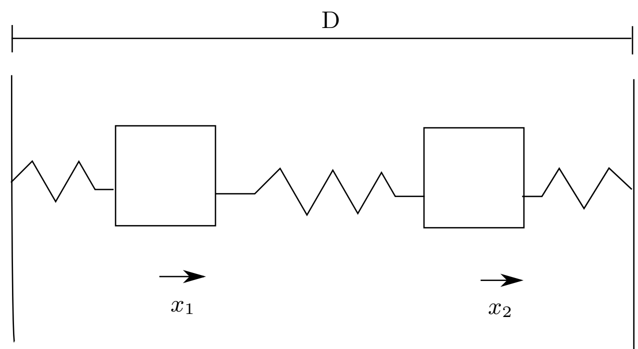
$$\begin{aligned} x' &= u \\ u' &= x'' = -2x' + 3x + \cos(t) = 3x - 2u + \cos(t) \end{aligned}$$

La idea es representar estas dos ecuaciones como algo de la forma $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{b}$, con $\vec{X} = (x, u)$ y $\vec{b}$ el vector que representa la parte no homogenea. Es simple encontrar la matriz y el vector alineando las ecuaciones de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
x' &= 0x + 1u + 0 \\
u' &= 3x - 2u + \cos(t)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{bmatrix}
$$

El cual es un sistema lineal equivalente a la ecuación diferencial.



2. Definimos las variables x_1 y x_2 como las desviaciones del equilibrio del sistema para las masas 1 y 2. Tendremos entonces que las ecuaciones de movimiento son

$$
\begin{aligned}
mx_1'' &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\
mx_2'' &= -kx_2 - k(x_2 - x_1)
\end{aligned}
$$

No podemos transformar esto a un sistema lineal de inmediato pues son ecuaciones de orden 2, pero podemos aplicar el mismo truco que antes, con el cambio

$$x_1' = v_1, x_2' = v_2$$

Obtenemos el sistema

$$
\begin{aligned}
x_1' &= 0x_1 + 0x_2 + 1v_1 + 0v_2 \\
x_2' &= 0x_1 + 0x_2 + 0v_1 + 1v_2 \\
v_1' &= -2\frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}x_2 + 0v_1 + 0v_2 \\
v_2' &= \frac{k}{m}x_1 - 2\frac{k}{m}x_2 + 0v_1 + 0v_2
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & -2\frac{k}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}
$$

P2.- Considere el PC

$$x' = 2t(1-x), x(0) = 2$$

1. Demuestre que existe un único punto fijo en el espacio de las funciones continuas definidas en $t \in [-a, a]$, con $a < 1/2$, para el siguiente operador:

$$T(x)[t] = 2 + \int_0^t 2t(1-x(t))dt$$

2. Argumente que esto significa que existe una única solución para el PC, y encuentre esta solución usando iteraciones de Picard, con la primera iteración empezando con $x_0 = x(0) = 2$. **Hint:** Recuerde que la expansión en serie de Taylor en torno al 0 para la función exponencial es

$$e^y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y^i}{i!}$$

3. Verifique que esta solución es válida en $I = \mathbb{R}$, y no solo en $t \in [-a, a]$.

Pauta:

1. Recordemos que el teorema del punto fijo requiere que el operador sea contractante en el espacio de Banach descrito en el enunciado. Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos funciones en este espacio, entonces

$$\begin{aligned}
||T(x) - T(y)||_\infty &= ||\int_0^t 2t(-x(t) + y(t))dt||_\infty \\
&= \max_{t\in[-a,a]} |\int_0^t 2t(-x(t) + y(t))dt| \\
&\leq \max_{t\in[-a,a]} \int_0^t |2t(-x(t) + y(t))|dt \\
\text{La función es estrictamente creciente} \rightarrow &= \int_0^a |2t(-x(t) + y(t))|dt \\
t \in [-a, a] \rightarrow &\leq 2a \int_0^a |-x(t) + y(t)|dt \\
&\leq 2a \int_0^a ||-x + y||_\infty dt \\
&= 2a^2||x - y||_\infty < 1/2||x - y||_\infty
\end{aligned}$$

Es importante notar que si la función $f(z, t) = 2t(1 - z(t))$ no hubiera sido lipschitz en z no habríamos podido llegar a esta conclusión, pues en del paso 4 al 5 efectivamente usamos que $|f(x, t) - f(y, t)| < k|x(t) - y(t)|$, con $k = 2a = 1$.
Concluimos entonces que como el operador T es constractante en un espacio de Banach, tiene un único punto fijo.

2. Sea x la única solución del PC, entonces este cumple que

$$x'(t) = 2t(1-x), x(0) = 2$$
$$/\int_0^t \Rightarrow x(t) - 2 = \int_0^t 2t(1-x(t))dt$$

Lo cual nos dice que $x(t)$ es el único punto fijo del operador T, por lo que concluimos que esta solución es única, y existe.
Recordemos que las iteraciones de Picard para un operador T se definen como

$$x_0(t) = x_0, x_n(t) = T(x_{n-1})[t]$$

Empezando con $x_0(t) = 2$, tendremos que

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= 2 + \int_0^t 2t(1-2)dt = 2 - t^2 \\
x_2(t) &= 2 + \int_0^t 2t(1-2-t^2)dt \\
&= 2 + \int_0^t 2t(1-2)dt + \int_0^t 2t(-t^2) = 2 - t^2 + \frac{t^4}{2} \\
x_3(t) &= 2 + \int_0^t 2t\Big(1-2-t^2+\frac{t^4}{2}\Big)dt \\
&= 2 + \int_0^t 2t(1-2-t^2)dt + \int_0^t 2t\frac{t^4}{2}dt \\
&= 2 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} \\
x_4(t) &= 2 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!}
\end{aligned}$$

Esto sugiere la formula general

$$x_n(t) = 1 + \sum_1^n (-1)^i \frac{t^{2i}}{i!}$$

Esta formula es correcta, pues por inducción, tenemos que

$$\begin{aligned}
x_{n+1}(t) &= 2 + \int_0^t 2t(1-x_n)dt \\
HI \Rightarrow &= 2 + \int_0^t 2t(1-(-t^2+\frac{t^4}{2}-\frac{t^6}{3!}+\frac{t^8}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}))dt \\
&= 2 + t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \dots + \int_0^t 2(-1)^{n+1}\frac{t^{2n+1}}{n!}dt \\
&= 2 + t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \dots + (-1)^{n+1} 2\frac{t^{2(n+1)}}{2(n+1)n!} \\
&= 2 + t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{t^{2(n+1)}}{(n+1)!} \blacksquare
\end{aligned}$$

Así, tomando el límite y usando el hint, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{(-t^2)^i}{i!} = 1 + e^{-t^2}$$

3. Como las iteraciones de Picard siempre convergen al punto fijo del operador si es que existe, entonces tenemos que $x(t) = 1 + e^{-t^2}$ es este punto fijo, y es la solución del PC. Verifiquemos:

$$x(0) = 1 + e^0 = 2$$
$$x'(t) = -2te^{-t^2} = 2t(1 - (1 + e^{-t^2}))$$

Podemos concluir entonces que la solución es válida para todo $t \in \mathbb{R}$. Esta es una observación importante, pues el TEU local nos garantiza existencia y unicidad en algún intervalo mínimo, pero no nos dice cual es el intervalo maximal donde existe dicha solución.

P3.- Consideramos la ecuación

$$f(t) = 1 + \int_t^{\infty} (t-s) f(s)\phi(s) ds, t \geq 0$$

donde ϕ es una función continua que satisface $\sup_{t\geq 0} |e^t \phi(t)| \leq C$, y no conocemos f. Si consideramos el espacio

$$C_b = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{R} / f \text{ es continua y acotada}\}$$

con la norma del supremo, o de la convergencia uniforme, $||f||_\infty = \sup_{t\geq 0} |f(t)|$.

1. Encuentre un operador $T : C_b \to C_b$ tal que los puntos fijos de T sean las soluciones de la ecuación. Justifique que su operador tiene como recorrido a C_b.
2. Determine los valores de la constante C para que T sea contractante y demuestre que la ecuación posee una única solución f.
3. Finalmente, demuestre que f es de clase C^2 y encuentre la ecuación diferencial que satisface.

Pauta:

1. Queremos un operador T tal que si una función f cumple la ecuación, entonces $f(t) = T(f)[t] \forall t \geq 0$. Basta definir

$$T(g)[t] = 1 + \int_t^{\infty} (t-s) g(s)\phi(s) ds$$

Veamos que está bien definido. Si $g \in C_b$, entonces debemos ver si la integral impropia esta bien definida:

$$
\begin{aligned}
\Big|\int_t^{\infty}(t-s)g(s)\phi(s)ds\Big| &\leq \int_t^{\infty}|t-s||g(s)||\phi(s)|ds \\
&\leq \int_t^{\infty}|t-s|||g||_{\infty}||\phi||_{\infty}ds \\
&\leq \int_t^{\infty}|t-s|e^{-s}ds \\
&= C||g||_{\infty}\int_t^{\infty}e^{-s}(s-t)ds \\
&= C||g||_{\infty}(\int_t^{\infty}se^{-s}ds - t\int_t^{\infty}e^{-s}ds) \\
&= C||g||_{\infty}(-se^{-s}\Big|_t^{\infty} + \int_t^{\infty}e^{-s}ds - t(-e^{-\infty}+e^{-t}) \\
\lim_{s\to\infty}\frac{s}{e^s} = 0 \Rightarrow &= C||g||_{\infty}(te^{-t}+e^{-t}-te^{-t}) = C||g||_{\infty}e^{-t}
\end{aligned}
$$

Por lo que la integral converge, por lo que concluimos que el operador está bien definido. Además, por el desarrollo anterior, tenemos que $T(g)[t] < 2 + C||g||_{\infty}e^{-t} < 2 + C, \forall t \geq 0$, por lo que la función $T(g)[t]$ es acotada, y concluimos entonces que $T(g)[t] \in C_b$ pues tiene derivada continua.

2. Lo haremos igual que en la pregunta anterior:

$$
\begin{aligned}
||T(g)-T(f)||_{\infty} &= ||\int_t^{\infty}(t-s)\phi(s)(f(s)-g(s)ds||_{\infty} \\
&= \max_{t\geq 0}\Big|\int_t^{\infty}\phi(s)(f(s)-g(s))ds\Big| \\
&\leq \max_{t\geq 0} Ce^{-t}||f-g||_{\infty} = C||f-g||_{\infty}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, con $0 < C < 1$, el operador T es contractante. Como el espacio C_b es de Banach, concluimos en virtud del teorema del punto fijo que existe un único punto fijo f.

3. Derivando:

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= \Big(t\Big(\int_t^{\infty}f(s)\phi(s)ds) - \int_t^{\infty}sf(s)\phi(s)ds\Big)\Big)' \\
&= \int_t^{\infty}f(s)\phi(s)ds - tf(t)\phi(t) + tf(t)\phi(t) \\
&= \int_t^{\infty}f(s)\phi(s)ds \\
\Rightarrow f''(t) &= -f(t)\phi(t)
\end{aligned}
$$

Como ϕ es continua, concluimos que $f \in C^2$ y la ecuación diferencial que satisface es $f''(t) = -f(t)\phi(t)$.

$\boxed{\textbf{P4.-}}$ Sea Φ la matriz fundamental de soluciones para el sistema $X'(t) = A(t)X(t)$ con condiciones iniciales en t_0. Demuestre que:

1. Demuestre que $\Phi(t)$ es la única función en $C^1(I)^{n\times n}$ que satisface $\Phi(t_0) = I$ y $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$.

2. Si $A(t)$ es una matriz constante y $\Phi(0) = I$, entonces $\forall t, s \in I$ se cumple que $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$

3. Si $A(t)$ es una matriz de periodo T y $\Phi(0) = I$, entonces $\forall t \in I$ se cumple que $\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T)$

4. Asumiendo $\Phi(T)$ tiene como valor propio 1, $A(t)$ es una matriz de periodo T y $\Phi(0) = I$, demuestre que el sistema admite una solución periódica de periodo T.

Pauta:

1. La matriz fundamental canónica es la matriz cuyas columnas son las soluciones fundamentales de un sistema de ecuaciones. La k-ésima solución fundamental se define como la solución al problema de valor inicial

$$\begin{cases} \phi_k'(t) = A(t)\phi_k \\ \phi_k(t_0) = e_k \end{cases}$$

Donde e_k es el vector unitario en la k-ésima componente. El orden de las soluciones en la matriz fundamental es de izquierda a derecha con k aumentando. Dado esto, tenemos que

$$\Phi(t_0) = \begin{bmatrix} \phi_1(t_0) & \phi_2(t_0) & ... & \phi_n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & ... & e_n \end{bmatrix} = I$$

y al derivar

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= \begin{bmatrix} \phi_1'(t) & \phi_2'(t) & ... & \phi_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t)\phi_1 & A(t)\phi_2 & ... & A(t)\phi_n \end{bmatrix} \\ &= A(t) \begin{bmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) & ... & \phi_n(t) \end{bmatrix} = A(t)\Phi(t) \end{aligned}$$

Para demostrar la unicidad, asumimos que existe otra función Ψ que cumple lo anterior. Entonces tendríamos que $Z_k(t) = (\Phi(t) - \Psi(t))e_k$ cumple que $Z_k(t_0) = 0$ y $Z_k'(t) = A(t)Z_k(t)$. Como la función nula es solución de esta ecuación, por teorema de existencia y unicidad tenemos que $Z_k \equiv 0$ para todo k y por lo todas las columnas de $\Phi(t) - \Psi(t)$ son nulas por lo que concluimos que $\Phi(t) - \Psi(t) = 0$.

2. Dado un s, tenemos que la matriz $\Psi(t) \equiv \Phi(t+s)$ es una matriz fundamental del sistema con valor inicial $\Phi(s)$, es decir, que $\Psi'(t) = A\Phi(t+s)$, y $\Psi(0) = \Phi(s)$. Además, la matriz $\Phi(t)\Phi(s)$ también es la matriz fundamental con valor inicial $\Phi(s)$ para el sistema de ecuaciones, pues $\dfrac{d\Phi(t)\Phi(s)}{dt} = A\Phi(t)\Phi(s)$. Por unicidad de la matriz fundamental, concluimos que ambas matrices son iguales.

3. De igual manera que antes, tenemos que $\dfrac{d\Phi(t+T)}{dt} = A(t+T)\Phi(t+T) = A(t)\Phi(t+T)$, $\dfrac{d\Phi(t)\Phi(t)}{dt} = A(t+T)\Phi(t)\Phi(T) = A(t)\Phi(t)\Phi(T)$, y ambas matrices cumplen la misma condición inicial $\Phi(T)$, por lo que son iguales en virtud de la unicidad de la matriz fundamental de soluciones.

4. Usando el dato del enunciado, sabemos que existe un vector $\vec{x}_0$ tal que $\Phi(T)\vec{x}_0 = \vec{x}_0$. Usando la parte 3, tendremos que $\Phi(t+T)\vec{x}_0 = \Phi(t)\Phi(T)\vec{x}_0 = \Phi(t)\vec{x}_0$. Veamos que $\vec{y}(t) \equiv \Phi(t)\vec{x}_0$ es

una solución periódica con condiciones iniciales $\vec{x}_0$.
En efecto, tenemos que $\vec{y}'(t) = \Phi'(t)\vec{x}_0 = A(t)\Phi(t)\vec{x}_0 = A(t)\vec{y}$, y además $\vec{y}(0) = \Phi(0)\vec{x}_0 = \vec{x}_0$.
Por lo que se concluye el resultado.