Auxiliar 7: Sistemas Lineales

Sistemas lineales y existencia y unicidad

Profesor: Roberto Cortez
Auxiliar: Miguel Sepúlveda

P1.-

1. Represente la siguiente ecuación diferencial como un sistema lineal:

$$x'' + 2x' - 3x = \cos(t)$$

2. Exprese las ecuaciones de movimiento de una cadena de extremos fijos con 2 masas conectadas por resortes, y convierta este sistema a un sistema matricial de orden 1.

P2.- Considere el PC

$$x' = 2t(1-x), x(0) = 2$$

- Demuestre que existe un único punto fijo en el espacio de las funciones definidas en el cuadrado $(t, x) \in [-a, a] \times [2-b, 2+b]$.

$$T(x)[t] = 2 + \int_0^t 2t(1 - x(t))dt$$

- Argumente que esto significa que existe una única solución para el PC, y encuentre esta solución usando iteraciones de Picard, con la primera iteración empezando con $x_0 = x(0) = 2$. **Hint:** Recuerde que la expansión en serie de Taylor en torno al 0 para la función exponencial es

$$e^y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y^i}{i!}$$

- Verifique que esta solución es válida en $I = \mathbb{R}$, y no solo en $t \in [-a, a]$.

P3.- Consideramos la ecuación

$$f(t) = 1 + \int_t^{\infty} (t - s) f(s)\phi(s)ds$$

donde ϕ es una función continua que satisface $\sup_{t\geq 0}|e^t\phi(t)| \leq C$, y no conocemos f. Si consideramos el espacio

$$C_b = \{f : [0, \infty) \to \mathbb{R}/f \text{ es continua y acotada}$$

con la norma del supremo, o de la convergencia uniforme, $||f||_\infty = \sup_{t\geq 0}|f(t)|$.

1. Encuentre un operador $T : C_b \to C_b$ tal que los puntos fijos de T sean las soluciones de la ecuación. Justifique que su operador tiene como recorrido a C_b.
2. Determine los valores de la constante C para que T sea contractante y demuestre que la ecuación posee una única solución f.
3. Finalmente, demuestre que f es de clase C^2 y encuentre la ecuación diferencial que satisface.

P4.- Sea Φ la matriz fundamental de soluciones para el sistema $X'(t) = A(t)X(t)$ con condiciones iniciales en t_0. Demuestre que:

1. Demuestre que $\Phi(t)$ es la única función en $C^1(I)^{n\times n}$ que satisface $\phi(t_0) = I$ y $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$.
2. Si $A(t)$ es una matriz constante y $\Phi(0) = I$, entonces $\forall t, s \in I$ se cumple que $\Phi(t + s) = \Phi(t)\Phi(s)$
3. Si $A(t)$ es una matriz de periodo T y $\Phi(0) = I$, entonces $\forall t \in I$ se cumple que $\Phi(t + T) = \Phi(t)\Phi(T)$
4. Asumiendo $\Phi(T)$ tiene como valor propio 1, demuestre que el sistema admite una solución periódica de periodo T.