• El operador $P(D)$, como habíamos visto, representa el Eorhot: Vonete una EDO lineal homogénea a coeficientes constantes:

$$P(D)\,y = 0$$

Con $P(D) \equiv \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} D^i$. Recordar que al operador le asociamos un polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^n + \overline{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \overline{a}_1\lambda + \overline{a}_0$$

$l \leq n$ raíces:

$$= \underset{\text{raíz}}{(\lambda-\lambda_1)}^{\underset{\text{multiplicidad}}{m_1}} \cdots (\lambda-\lambda_l)^{m_l} = \prod_{i=1}^{l} (\lambda-\lambda_i)^{m_i}$$

raíz multiplicidad

y vimos que esto nos permite representar $P(D)$ et erhot: Vonente

$$P(D) = (D-\lambda_1)^{m_1} \circ \dots \circ (D-\lambda_l)^{m_l}$$

P1) $P(D+\lambda)1 = (D-\lambda_1+\lambda)\circ \dots \circ (D-\lambda_\ell+\lambda)1$ $\xrightarrow{}$ cte $Dcte = 0$

a)

$= (D-\lambda_1+\lambda)\circ \dots \circ (\lambda-\lambda_\ell)$ ← aun cte c/r a X

$= (D-\lambda_1+\lambda)\circ \dots (D-\lambda_{\ell-2}+\lambda)(\lambda-\lambda_{\ell-1})(\lambda-\lambda_\ell)$

$$= \prod_{i=1}^{\ell}(\lambda-\lambda_i)^{m_i} = p(\lambda)$$

b) $p(D)e^{\lambda x}$. Notemos que $(D-\lambda_i)e^{\lambda x}$ ← Funcional

$$= \lambda e^{\lambda x} - \lambda_i e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\lambda-\lambda_i)$$ ← Numero

$$\rightarrow p(D)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\prod_{i=1}^{\ell}(\lambda-\lambda_i)^{m_i} = e^{\lambda x}p(\lambda)$$

Notar: Si λ es raiz, entonces habra algun $(D-\lambda)$ que se haga 0 al operar con $e^{\lambda x}$

c) Veamos que pasa con $(D-\lambda_\ell)e^{\lambda x} f(x)$

$$(D-\lambda_\ell)e^{\lambda x} f(x) = \lambda e^{\lambda x} f(x) + e^{\lambda x} f'(x) - \lambda_\ell e^{\lambda x} f(x)$$

$$= e^{\lambda x}\left(\lambda f(x) - \lambda_\ell f(x) + f'(x)\right)$$

$$= e^{\lambda x}(D - \lambda_\ell + \lambda) f(x)$$

el operador $e^{\lambda x}$ con lo que queda a la izquierda

sucede lo mismo que en b)

$$\rightarrow P(D)(f(x)e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} P(D+\lambda) f(x)$$

Notar que si $\lambda = \lambda_\ell$ (por ejemplo), $f(x) = x$,

y además $m_\ell = 2$, tenemos que

$$(D-\lambda_\ell)^2 e^{\lambda_\ell x} f(x) = (D-\lambda_\ell) e^{\lambda_\ell x} D x = 0$$

Pero si $f(x) = x^2$

$$(D-\lambda_\ell)^2 e^{\lambda_\ell x} f(x) = e^{\lambda_\ell x} D x^2 = 2e^{\lambda_\ell x} \neq 0$$

En general

$$P(D)(x^r e^{\lambda x}) = (D-\lambda_1)^{m_1} \circ \dots \circ (D-\lambda)^{m} x^r e^{\lambda x}$$

$$= (D-\lambda_1)^{m_1} \circ \dots \circ e^{\lambda x} D^m x^r$$

$D^m x^r = 0 \iff 0 \le r \le m-1 \to$ me sirven m soluciones

---

Esto significa que puedo generar $\sum_{i=1}^{l} m_i = n$ soluciones para una EDO de orden n, y si puedo demostrar que son l.i., estamos listos!

Para una EDO de orden n, con $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{C}$ raíces de $p(\lambda)$ asociado a $P(D)$, que es nulo

Su espacio homogéneo es generado por los sgtes vectores, para cada λ

$$x^r e^{\lambda x}, \quad \forall r < m_l$$

Notar que si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces hay otra raíz compleja u t que $\lambda = \bar{u} = \alpha + i\beta$, con igual multiplicidad m

$$\rightarrow \mathcal{H} = \langle \text{algunos vectores}, \overbrace{e^{\alpha x}(\cos x\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta x)}^{e^{\lambda x}}, \overbrace{e^{\alpha x}(\cos \beta x - i\,\mathrm{sen}\,\beta x)}^{e^{\bar{\lambda} x}},$$

$$x e^{\alpha x}(\cos x\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta x), x e^{\alpha x}(\cos \beta x - i\,\mathrm{sen}\,\beta x), \ldots, x^m e^{\alpha x}(\cos \beta x + i\,\mathrm{sen}\,\beta x),$$

$$x^m e^{\alpha x}(\cos \beta x - i\,\mathrm{sen}\,\beta x), \text{ más vectores} \rangle$$

$$= \langle \text{algunos vectores}, e^{\alpha x}\cos x\beta, e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,x\beta, x e^{\alpha x}\cos x\beta,$$

$$x e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,x\beta, \ldots, x^m e^{\alpha x}\cos x\beta, x^m e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,x\beta, \text{ más vectores} \rangle$$

Pues $x^r e^{\alpha x}\cos \beta x = \dfrac{e^{\lambda x} + e^{\bar{\lambda} x}}{2}$ y $x^r e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x = \dfrac{e^{\lambda x} - e^{\bar{\lambda} x}}{2i}$,

son combinaciones lineales.

P2

1. $(D^4 - 2D^2 + 1)y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0$

$\rightarrow \lambda^2 = \frac{+2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$

$= 1 \rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

$p(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^2 = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2$

$\lambda_1 = 1, m_1 = 2, \lambda_2 = -1, m_2 = 2$, ambas reales

$\rightarrow H = \langle \{ e^x, xe^x, e^{-x}, xe^{-x} \} \rangle$

2. $(D^3 + 2D^2 + 2D)y = D(D^2 + 2D + 2)y$

$\rightarrow \lambda_\pm = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i, \lambda_0 = 0$ también es raíz

$\lambda_\pm = \alpha \pm \beta i = -1 \pm i, m_\pm = 1, \lambda_0 = 0, m_0 = 1$

$\rightarrow H = \langle \{ 1, e^{-x} \operatorname{Sen} x, e^{-x} \operatorname{Cos} x \} \rangle$

3. $(D^4 - D^3)y = D^3(D-1)y = 0$

$\lambda_1 = 1,\ m_1 = 1,\ \lambda_0 = 0,\ m_0 = 3$

$\rightarrow H = \langle \{ \underbrace{1, x, x^2}_{\lambda_0}, \underbrace{e^x}_{\lambda_1} \} \rangle$

4 $(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0$

$\lambda_{1,2}^2 = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = -1 \rightarrow \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$

$m_1 = 2 \qquad m_2 = 2$

$\rightarrow H = \langle \{ \cos x, x\cos x, \operatorname{sen} x, x \operatorname{sen} x \} \rangle$

P3 | Hay 2 metodos para este tipo de EDOS

Coef. indeterminados: (matraquero)

Si la EDO es de la forma $P(D)y = Q(x) = f_{n_0}(x)e^{\lambda_0 x}$

es algo que podemos matar a punta de operadores

diferenciales. el plan

$P(D)y = Q(x) \,/\, P_Q(D)\circ \rightarrow P_Q(D)P(D)y = 0$

anulador

Si $Q(x) = f_{N_0}(x) e^{\lambda_0 x}$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, polinomio $gr(f_{N_0}) \leq N_0$, se tiene $P_Q(D) = (D-\lambda_0)^{N_0+1}$.

$$(D-\lambda_0)^{N_0+1} P(D) y = (D-\lambda_0)^{N_0+1} f_{N_0}(x) e^{\lambda_0 x}$$

$$= e^{\lambda_0 x} D^{N_0+1} f_{N_0}(x)$$

$$= 0$$

que es una EDO homogénea que sabemos resolver

- $Q(x) = x e^{\lambda_0 x} \rightarrow P_Q(D) = (D-\lambda_0)^2$
- $Q(x) = x^2 e^x \cos(2x)$,

$$= \frac{x^2 e^x e^{2ix} + x^2 e^x e^{-2ix}}{2}$$

Como el anulador de la suma es la composición de los anuladores, tenemos que

$$P_Q(D) = (D-(1+2i))^3 (D-(1-2i))^3$$

- $Q(x) = \underbrace{x e^{\lambda_0 x}}_{Q_1} + \underbrace{x^2 e^{\lambda_1 x}}_{Q_2}$, $P_Q = P_{Q_1} \circ P_{Q_2} = (D-\lambda_0)^2 (D-\lambda_1)^3$

La idea es que las "soluciones contribuidas" por P_Q en

$$(P_Q \circ P)(D)\, y = 0$$

Son las funciones que generan la solución particular.

$\rightarrow$ $$y_p = \sum A_i\, y_i^g \leftarrow \text{solución generada}$$

- Soluciones contribuidas por P_Q: aquellas soluciones que ~~agrega~~ agregan los términos de P_Q.
- Los coeficientes A_i se encuentran imponiendo $P(D)\, y_p(x) = Q(x)$, e igualando coef. de funciones l.i.

---

1. $(D^3 + D^2)\, y = 8e^x + 7x^2$

$$P_Q(D) = \underbrace{(D-1)}_{P_{e^x}}\ \underbrace{D^3}_{P_{x^2}}$$

$P_{r_0}(x)\, e^{\lambda x}$.

$(D-\lambda)^{r_0+1}$

$$\rightarrow D^3 (D-1)\, D^2 (D+1)\, y = 0$$

$$\underbrace{x^2, x^3, x^4, e^{+x}}_{y_p}\quad \underbrace{1, x, e^{-x}}_{y_h}$$

$\to y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x + C_3$

$y_p = A_1 x^2 + A_2 x^3 + A_3 x^4 + A_5 e^{-x}$

- C_i se determinan con condiciones iniciales
- A_i son fijos para la EDO !!!

$D^2(D+1)\, y_p = 8 e^{x} + 4x^2$

$\to D^2(2A_1 x + 3A_2 x^2 + 4A_3 x^3 + A_5 e^{+x} + A_1 x^2 + A_2 x^3 + A_3 x^4$
$+ A_5 e^{+x}) = 8e^{x} + 4x^2$

$\to 0 + 6A_2 + 24A_3 x + A_5 e^{x} + 2A_1 + 6A_2 x + 12A_3 x^2$
$+ A_5 e^{x} = 8e^{x} + 4x^2$

$\to 6A_2 + 2A_1 = 0 \to -\frac{6 \cdot 4}{3} + 2A_1 = 0 \to A_1 = 4$

$24A_3 + 6A_2 = 0 \to 8 + 6A_2 = 0 \to A_2 = -4/3$

$12A_3 = 4 \to A_3 = 1/3$

$2A_5 = 8 \to A_5 = 4$

$\to y_p = 4x^2 - 4/3 x^3 + \frac{1}{3}x^4 + 4e^{x}$ //

Como verán, se puede alargar un poco, pero es simple y fácil de recordar

---

<u>Variación de parámetros</u>

y $\sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i y^{(i)} = \bar{Q}(x)$, podemos escribirlo como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}'}_{\equiv \vec{Z}(x)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\bar{a}_0 & -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\equiv A_c} \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{Q}(x) \end{bmatrix}}_{\equiv \vec{b}}$$

$$(PC) \begin{cases} \vec{Z}'(x) = A_c(x)\vec{Z}(x) + \vec{b}(x) \\ \vec{Z}(x_0) = \vec{Z}_0, \; Z_{0n} \equiv y^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Sean $\vec{Z}_i = \begin{bmatrix} y_i \\ y_i' \\ \vdots \\ y_i^{(n-1)} \end{bmatrix}$ las soluciones homogéneas de este sistema (pues y_i es sol. homogénea de la EDO)

Notamos que

$$A_c \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\overline{a}_0 & -\overline{a}_1 & -\overline{a}_2 & \cdots & -\overline{a}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{Z}_1' & \cdots & \vec{Z}_n' \end{bmatrix}$$

Prop muy importante!

Proponemos $y_p = F_1(x) y_1(x) + \dots + F_n(x) y_n(x)$ (como antes)

Pero $y_p = (\Phi F)_1$, $y_p' = (\Phi F)_2 \to Z_p = \Phi F$

Queremos que $Z_p' = (\Phi F)' = A_c \Phi F + \vec{b}$ (es solución)

$$\to \Phi' F + \Phi F' = A_c \Phi F + \Phi F'(x)$$

$$\to \Phi \vec{F}' = \vec{b} \xrightarrow[\Phi \text{ invertible}]{} \vec{F}' = \Phi^{-1} \vec{b}$$

$$\to \vec{F} = \int \Phi^{-1}(x)\, \vec{b}(x)\, dx$$

2. En este caso, $P(D) = D^2 + 6D + 13$

$\Rightarrow r_{1,2} = -3 \pm 2i \Rightarrow H = \langle e^{-3x}\cos 2x,\ e^{-3x}\operatorname{sen} 2x \rangle$

$y_p = F_1(x)\, y_1 + F_2(x)\, y_{2x}$

Con $$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \int \Phi^{-1}(x)\, \vec{b}(x)\, dx$$

$$\Phi = [\vec{Z}_1, \vec{Z}_2] = \begin{bmatrix} e^{-3x}\cos 2x & e^{-3x}\operatorname{sen} 2x \\ -3e^{-3x}\cos 2x - 2e^{-3x}\operatorname{sen} 2x & -3e^{-3x}\operatorname{sen} 2x + 2e^{-3x}\cos 2x \end{bmatrix}$$

$$= e^{-3x}\begin{bmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -3\cos 2x - 2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x - 3\operatorname{sen} 2x \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \Phi^{-1} = \frac{1}{e^{-6x}\left(2\cos^2 2x - 3\cancel{\cos 2x\operatorname{sen} 2x} + \cancel{3\operatorname{sen} 2x\cos 2x} + 2\operatorname{sen}^2 2x\right)} \cdot e^{-3x}\begin{bmatrix} 2\cos 2x - 3\operatorname{sen} 2x & -\operatorname{sen} 2x \\ 3\cos 2x + 2\operatorname{sen} 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$$

$$= \frac{e^{3x}}{2}\begin{bmatrix} 2\cos 2x - 3\sin 2x & -\sin 2x \\ 3\cos 2x + 2\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$$

$$\vec{F} = \int \frac{\cancel{e^{3x}}}{2}\begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \cancel{e^{-3x}}\cos 2x \end{bmatrix} dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\cos 2x \sin 2x \\ \cos^2 2x \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\int \frac{\sin 4x}{2}\,dx \\ \int \frac{1}{2}(\cos 4x + 1)\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} +\frac{\cos 4x}{8} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 4x}{4} + x\right) \end{bmatrix}$$

$$\to y_p = \frac{\cos 4x}{\cancel{8}16} e^{-3x}\cos 2x + \frac{1}{16\cancel{8}}(\sin 4x + 4x)e^{-3x}\sin 2x$$

$$= \frac{e^{-3x}}{16}(\cos 4x \cos 2x + \sin 4x \sin 2x) + \frac{x e^{-3x}}{4}\sin 2x$$

$$= \underbrace{\frac{e^{-3x}}{16}\cos 2x}_{\in \mathcal{H}} + \frac{x e^{-3x}\sin 2x}{4} \text{"="} \frac{x e^{-3x}\sin 2x}{4}$$

3. $P_Q(D) = (D-2)^3 (D+3i)^2 (D-3i)^2$

$P(D) = (D-2)^3 (D^2+9)$

$= (D-2)^3 (D-3i)(D+3i)$

$\rightarrow P_Q(D) \circ P(D) y = 0$

$e^{2x}, xe^{2x}, x^2 e^{2x}, \cos(3x), \sin(3x)$

$\rightarrow x^3 e^{2x}, x^4 e^{2x}, x^5 e^{2x},$ $x\cos(3x), x\sin(3x), x^2\cos(3x), x^2\sin(3x)$

$\rightarrow y_p = (A_1 x^3 + A_2 x^4 + A_3 x^5) e^{2x} +$ $x(A_4\cos(3x) + A_5\sin(3x) + A_6 x\cos(3x) + A_7 x\sin(3x))$

$\boxed{P3}$

$$(D^3+D)\,y = \frac{1}{1+e^x}$$

$$\hookrightarrow D(D^2+1) = D(D+i)(D-i)$$

$$\rightarrow \mathcal{H} = \langle \{1, \operatorname{Cos} x, \operatorname{Sen} x\} \rangle$$

$$\rightarrow \Phi = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{Cos} x & \operatorname{Sen} x \\ 0 & -\operatorname{Sen} x & \operatorname{Cos} x \\ 0 & -\operatorname{Cos} x & -\operatorname{Sen} x \end{bmatrix}$$

$$\det(\Phi) = W(1, \operatorname{Cos} x, \operatorname{Sen} x) = (\operatorname{Sen}^2 x \, \cancel{\operatorname{Cos} x} + \operatorname{Cos}^2 x)$$

$$= 1$$

$$\Phi^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -\operatorname{Sen} x & \operatorname{Cos} x \\ -\operatorname{Cos} x & -\operatorname{Sen} x \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{Cos} x \\ 0 & -\operatorname{Sen} x \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -\operatorname{Sen} x \\ 0 & -\operatorname{Cos} x \end{vmatrix} \\ \cancel{+}-\begin{vmatrix} \operatorname{Cos} x & \operatorname{Sen} x \\ -\operatorname{Cos} x & -\operatorname{Sen} x \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{Sen} x \\ 0 & -\operatorname{Sen} x \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{Cos} x \\ 0 & -\operatorname{Cos} x \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} \operatorname{Cos} x & \operatorname{Sen} x \\ -\cancel{\operatorname{Sen} x} & \cancel{\operatorname{Cos} x} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{Sen} x \\ 0 & \operatorname{Cos} x \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{Cos} x \\ 0 & -\operatorname{Sen} x \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T}{\det(\Phi)}$$

$$\rightarrow \Phi^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\operatorname{Sen} x & -\cos x \\ 1 & -\cos x & -\operatorname{Sen} x \end{bmatrix}^T$$

$$\rightarrow \vec{F} = \int \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\operatorname{Sen} x & -\cos x \\ 0 & -\cos x & -\operatorname{Sen} x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{1+e^x} \end{bmatrix} dx$$

$$= \int \begin{bmatrix} \frac{1}{1+e^x} \\ \frac{-\cos x}{1+e^x} \\ \frac{-\operatorname{Sen} x}{1+e^x} \end{bmatrix} dx \quad //$$

(No integrable)

P4 $\mu = \alpha + i\beta$ grado 3

$$\rightarrow \quad p(\mu) = 0,\ p'(\mu) = 0,\ p''(\mu) = 0,\ p'''(\mu) \neq 0$$

Usemos la indicación:

Caso base: $N = 0$

$$\frac{d^0}{dx^0}\left(x^3 e^{\mu x}\right) = x^3 e^{\mu x} = e^{\mu x}\left(\mu^0 x^3 + 3\cdot 0 \cdots + 3\cdot 0 + 0 \cdots\right)$$

Paso inductivo: Asumamos que se cumple para N, veamos que para con $N+1$

$$\frac{d^{N+1}}{dx^{N+1}}\left(x^3 e^{\mu x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^N\left(x^3 e^{\mu x}\right)}{dx^N}\right)$$

$$\overset{HI}{=} \frac{d}{dx}\left(e^{\mu x}\left(\mu^N x^3 + 3N\mu^{N-1}x^2 + 3N(N-1)\mu^{N-2}x + N(N-1)(N-2)\mu^{N-3}\right)\right)$$

$$= \left(3\mu^N x^2 + 6N\mu^{N-1}x + 3N(N-1)\mu^{N-2}\right)e^{\mu x}$$

$$+ \cancel{\mu}\, e^{\mu x}\left(\mu^{N+1}x^3 + 3N\mu^N x^2 + 3N(N-1)\mu^{N-1}x + N(N-1)(N-2)\mu^{N-2}\right)$$

$$= e^{\mu x}\left(\mu^{N+1}x^3 + \left(3N\mu^N + 3\mu^N\right)x^2 + \left(3N(N-1)\mu^{N-1} + 6N\mu^{N-1}\right)x\right.$$

$$\left. + N(N-1)(N-2)\mu^{N-2} + 3N(N-1)\mu^{N-2}\right)$$

$$= e^{\mu x}\left(\mu^{N+1}x^3 + 3(N+1)\mu^N x^2 + 3(N+1)N\mu^{N-1}x + (N+1)N(N-1)\mu^{N-2}\right)$$

■

Veamos ahora que $y_p(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{x^3 e^{\mu x}}{p'''(\mu)}\right)$

La edo es "equivalente" con

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y}{dx^i} = e^{\mu x}$$

, en el sentido de que tanto si $z \in$ ~~S~~ de esta edo, entonces $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \in S$ de la original

· Veamos entonces que $y_p(x)$ es solución particular

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y_p}{dx^i} = \sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{x^3 e^{\mu x}}{p'''(\mu)}\right)$$

$$= \frac{1}{p'''(\mu)} \sum_{i=0}^{N} a_i\left(e^{\mu x}\left(\mu^i x^3 + 3i\mu^{i-1}x^2 + 3i(i-1)\mu^{i-2}x + i(i-1)(i-2)\mu^{i-3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{p'''(\mu)}\left(\left(\sum_{i=0}^{N} a_i\mu^i\right)x^3 e^{\mu x} + 3x^2 e^{\mu x}\left(\sum_{i=0}^{N} i a_i \mu^{i-1}\right) + 3x e^{\mu x}\left(\sum a_i \mu^{i-2}(i-1)i\right) + e^{\mu x}\left(\sum a_i i(i-1)(i-2)\mu^{i-3}\right)\right.$$

$$\sum a_i \mu^i = p(\mu) = 0$$

$$\sum i a_i \mu^{i-1} = p'(\mu) = 0$$

$$\sum i(i-1)\mu^{i-2} a_i = p''(\mu) = 0$$

$$\sum i(i-1)(i-2)\mu^{i-3} a_i = p'''(\mu) \neq 0$$

$$\to \sum a_i \frac{d^i z_p}{dx^i} = e^{\mu x},$$ es solución

$$\to \mathrm{Re}(z_p) = \mathrm{Re}\left(\frac{x^3 e^{\mu x}}{p'''(\mu)}\right)$$ es solución de la original