P1 Buscamos las soluciones homogeneas: La EDO homogenea es

$$(D^2+5D+6)y=0 \qquad \lambda^2+5\lambda+6=0$$

$$\rightarrow (D+3)(D+2)y=0 \qquad \rightarrow \lambda=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2}$$

$$=-\frac{5\pm 1}{2}$$

$$\rightarrow y_h = C_1 \underbrace{e^{-3x}}_{y_1} + C_2 \underbrace{e^{-2x}}_{y_2}$$

- La idea de la variación de parámetros es proponer una solución de la forma

$$y_p(x) = r_1(x)y_1(x) + r_2(x)y_2(x)$$

De la EDO e imponiendo que $r_1' y_1 + r_2' y_2 = 0$, se obtiene

$$\left| \begin{array}{l} r_1' y_1 + r_2' y_2 = 0 \\ r_1' y_1' + r_2' y_2' = \bar{Q} \end{array} \right|$$

Como sistema matricial:

Matriz Fundamental $\rightarrow \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1' \\ r_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{Q} \end{bmatrix}$

~~Pero~~ Asumiendo $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \equiv W(y_1, y_2) \neq 0$, entonces usando la regla de Cramer obtenemos

$$r_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \bar{Q} & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{-\bar{Q}\, y_2}{W(y_1, y_2)}$$

$$r_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \bar{Q} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{\bar{Q}\, y_1}{W(y_1, y_2)}$$

$$\rightarrow y_p = -y_1 \int \frac{\bar{Q}\, y_2}{W(y_1, y_2)}\, dx + y_2 \int \frac{\bar{Q}\, y_1}{W(y_1, y_2)}\, dx$$

En este caso la matriz fundamental es

$$\Phi = \begin{bmatrix} e^{-3x} & e^{-2x} \\ -3e^{-3x} & -2e^{-2x} \end{bmatrix} \rightarrow W = -2e^{-5x} + 3e^{-5x}$$
$$= e^{-5x}$$

$$\rightarrow r_1 = -\int \frac{4 \operatorname{Sen} x\, e^{-2x}}{e^{-5x}}\, dx$$

$$= -4 \int \operatorname{Sen} x\, e^{3x}\, dx$$

$$= \frac{2}{5} e^{3x} (\operatorname{Cos} x - 3 \operatorname{Sen} x) + K_1$$

$$V_2 = \int \frac{4 \operatorname{Sen}x \, e^{-3x}}{e^{-5x}} \, dx$$

$$= 4 \int \operatorname{Sen}x \, e^{2x} \, dx$$

$$= -\frac{4}{5} e^{2x} (\operatorname{Cos}x - 2 \operatorname{Sen}x) + K_2$$

$$\to y_p = \left(\frac{2}{5} \cancel{e^{3x}} (\operatorname{Cos}x - 3 \operatorname{Sen}x) \right) \cancel{e^{-3x}}$$

$$+ \left(-\frac{4}{5} \cancel{e^{2x}} (\operatorname{Cos}x - 2 \operatorname{Sen}x) \right) \cancel{e^{-2x}}$$

$$+ K_1 y_1 + K_2 y_2 \leftarrow$$ es una solución homogenea, no nos interesa

$$\to y_p = \frac{2 \operatorname{Cos}x}{5} - \frac{6}{5} \operatorname{Sen}x - \frac{4 \operatorname{Cos}x}{5} + \frac{8 \operatorname{Sen}x}{5}$$

$$= \frac{-2 \operatorname{Cos}x}{5} + \frac{2 \operatorname{Sen}x}{5} = \frac{2}{5} (\operatorname{Sen}x - \operatorname{Cos}x) \;//$$

$$\therefore y = \frac{2}{5} (\operatorname{Sen}x - \operatorname{Cos}x) + C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} \;//$$

P2 Soluzione omogenea ;

$$(D^2+2D+1)\,y=0 \qquad \lambda^2+2\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=1$$

$$(D+1)^2\,y=0$$

$$\to y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \quad (\mathcal{H}=\{e^{-x}, xe^{-x}\})$$

Sea $y_p = \alpha(x)\,e^{-x} + \beta(x)\,x\,e^{-x}$, con

$$\beta(x) = -\int \frac{e^{-x}\ln x \cdot \cancel{x}\, e^{-x}}{W(e^{-x}, xe^{-x})}$$

$$W(e^{-x}, xe^{-x}) = \begin{bmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x}-xe^{-x} \end{bmatrix}$$

$$= e^{-2x} - \cancel{xe^{-2x}} + \cancel{xe^{-2x}} = e^{-2x}$$

$$\to \beta(x) = +\int \frac{e^{-2x}\ln x}{e^{-2x}}\,dx = +\int \ln x\,dx$$

$$\left|\begin{array}{l} u=\ln x \to du=\frac{1}{x}dx \\ dv=1 \to v=x \end{array}\right| \to \alpha(x) = +\left(x\ln x - \int dx\right)$$

$$= -x + x\ln x$$

$$u(x) = -\int \frac{e^{-x}\ln x \cdot x e^{-x}}{e^{-2x}}\,dx = -\int x \ln x \,dx$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \ln x \to du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x \to v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = -\frac{x^2 \ln x}{2} + \int \frac{x}{2}\,dx$$

$$= -\frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}\left(-\ln x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\to y_p = \frac{x^2}{2}\left(-\ln x + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + x(\ln x - 1)\,x e^{-x}$$

$$= x^2 e^{-x}\left(-\frac{\ln x}{2} + \frac{1}{4} + \ln x - 1\right)$$

$$= x^2 e^{-x}\left(\frac{\ln x}{2} - \frac{3}{4}\right) //$$

$\boxed{P2}$ 1. $4\theta'' = -8\theta - 8\theta'$

$$\to \theta'' + 2\theta' + 2\theta = 0 \quad , \theta(0) = \theta_0,\ \theta'(0) = 0$$

$$\to (D^2 + 2D + 2)\theta = 0$$

$$\to (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)\theta = 0$$

Con $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$

$\rightarrow \mathcal{H} = \{ e^{-x}\cos x, e^{-x}\operatorname{Sen} x \}$

Como las condiciones iniciales son $\theta(0)=\theta_0$ y $\dot{\theta}(0)=0$, entonces

$$\theta(t) = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\operatorname{Sen} x$$

$$\dot{\theta}(t)\Big|_{t=0} = e^{-x}(-C_1\operatorname{Sen} x + C_2\cos x) - e^{-x}(C_1\cos x + C_2\operatorname{Sen} x)\Big|_{t=0}$$

$$= 0$$

$$\rightarrow \quad C_2 - C_1 = 0 \rightarrow C_2 = C_1$$

$$\theta(0) = \theta_0 = C_1$$

$$\therefore \theta(t) = \theta_0 e^{-t}(\cos t + \operatorname{Sen} t)$$

Nota: es único por teorema de existencia y unicidad

$$= e^{-t}\cos t \, e^{-t}(\cos t - \text{sen}\, t)$$

$$+ e^{-t}\,\text{sen}\, t \, e^{-t}(\cos t + \text{sen}\, t)$$

$$= e^{-2t}(\cos^2 t - \cos t\,\text{sen}\, t + \text{sen}\, t \cos t + \text{sen}^2 t)$$

$$= e^{-2t}$$

$$\to \alpha(t) = -\int \frac{e^{-2t}\,\text{sen}^2 t}{e^{-2t}}\, dt$$

$$= -\int \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right) dt = -\frac{t}{2} + \frac{\text{sen}\, 2t}{4}$$

$$\beta(t) = \int \frac{\cancel{e^{-t}}\,\text{sen}\, t\,\cancel{e^{-t}}\cos t}{\cancel{e^{-2t}}}\, dt$$

$$= \int \frac{\text{sen}\, 2t}{2}\, dt = -\frac{\cos 2t}{4}$$

2. en $t=2\pi$, tenemos que

$$\theta(t=2\pi)=\theta_0 e^{-2\pi}$$

$$\dot\theta(t=2\pi)=\theta_0\left(-e^{-t}(\cos t+\operatorname{sen} t)+e^{-t}(-\operatorname{sen} t+\cos t)\right)\Big|_{t=2\pi}$$

$$=\theta_0\left(-e^{-2\pi}+e^{-2\pi}\right)=0$$

el problema es entonces

$$\begin{cases}\theta''+2\dot\theta+2\theta=e^{-t}\operatorname{sen} t\\ \theta(2\pi)=\theta_0 e^{-2\pi}=\theta_{2\pi}\\ \dot\theta(2\pi)=0\end{cases}$$

Proponemos $\theta_p=\alpha(t)e^{-t}\cos t+\beta(t)e^{-t}\operatorname{sen} t$

Con

$$\alpha(t)=-\int\frac{e^{-t}\operatorname{sen} t\cdot e^{-t}\operatorname{sen} t}{W(e^{-t}\cos t,e^{-t}\operatorname{sen} t)}\,dt$$

$$W(e^{-t}\cos t,e^{-t}\operatorname{sen} t)=\begin{vmatrix}e^{-t}\cos t & e^{-t}\operatorname{sen} t\\ -e^{-t}\cos t-e^{-t}\operatorname{sen} t & -e^{-t}\operatorname{sen} t+e^{-t}\cos t\end{vmatrix}$$

$\rightarrow \theta_p = \left(-\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) e^{-t}\cos t - \frac{\cos 2t}{4} e^{-t}\sin t$.

$$= -\frac{t}{2}e^{-t}\cos t + e^{-t}\left(+\frac{\cos t \sin 2t}{4} - \frac{\cos 2t \sin t}{4}\right)$$

$$= -\frac{te^{-t}}{2}\cos t + e^{-t}\sin t$$

← parte de homogenea

$$\theta_p = -\frac{te^{-t}}{2}\cos t \quad //$$

$$\therefore \theta(t) = C_1 e^{-t}\cos t + C_2 e^{-t}\sin t - \frac{te^{-t}}{2}\cos t$$

$$\theta(2\pi) = C_1 \cancel{e^{-2\pi}} - \frac{2\pi \cancel{e^{-2\pi}}}{2} = \theta_{2\pi} = \theta_0 \cancel{e^{-2\pi}}$$

$$\rightarrow C_1 = \theta_0 + \pi$$

$$\dot\theta(t)\Big|_{t=2\pi} = (\theta_0+\pi)(-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t) + C_2(-e^{-t}\cancel{\sin t} + e^{-t}\cos t) + \frac{1}{2}\left(-e^{-t}\cos t + te^{-t}\cos t + \frac{te^{-t}}{2}\cancel{\sin t}\right)\Big|_{t=2\pi}$$

$$\dot\theta(0) \underset{=0}{=} (\theta_0+\pi)(-e^{-2\pi}) + C_2 e^{-2\pi} + \frac{1}{2}\left(e^{-2\pi} + 2\pi e^{-2\pi}\right)$$

$$\rightarrow C_2 = \left(+(l_0 + \pi) e^{-2\pi} + \frac{e^{-2\pi}}{2}(1-2\pi) \right) \frac{1}{e^{-2\pi}}$$

$$= l_0 + \pi + \frac{1}{2} - \pi = ; C_2$$

$$C_2 = l_0 + 1/2$$

P3) Formula de abel

Para una EDO $y^{(n)} + \bar{a}_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \bar{a}_0 y = 0$, si $y_1, \dots, y_n$ son soluciones de la EDO, entonces

$$W'(y_n, \dots, y_1; x) = -\bar{a}_{n-1}(x) W(y_n, \dots, y_1; x)$$

$$\rightarrow W(x) = C \exp\left(-\int \bar{a}_{n-1}(x)\,dx\right)$$

1. ~~En~~ Para esta EDO, $\bar{Q}_{n-1}(x) = P(x)$

$$\rightarrow W(y_1, y_2; x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C\exp\left(-\int P(x)\,dx\right)$$

$$\rightarrow y_1 y_2' - y_2 y_1' = C\exp\left(-\int P(x)\,dx\right)$$

$$\rightarrow y_2' - \frac{y_2 y_1'(x)}{y_1(x)} = \frac{C}{y_1(x)}\exp\left(-\int P(x)\,dx\right) \qquad (y_1 \neq 0)$$

es una EDO para y_2'!

$$/ \cdot \exp\left(\int -\frac{y_1'}{y_1}\,dx\right) = \exp\left(-\int \frac{dy_1}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1}$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C\exp\left(-\int P(x)\,dx\right)}{y_1^2(x)} \quad // \int$$

parte de la otra sol. homogénea

$$\rightarrow y_2 = C\,y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)}\exp\left(-\int P(x)\,dx\right)dx + D\,y_1(x)$$

Tomamos $D = 0$:

$$\boxed{y_2 = C\,y_1\int \frac{1}{y_1^2}\exp\left(-\int P(x)\,dx\right)dx}$$

fórmula de Liouville

L1

2, La EDO homogénea es

$$4x^2 y'' + y = 0$$

Con $y_1 = x^{1/2}$. Usando la formula

$$y_2 = Cx^{1/2} \int \frac{1}{x} \exp\left(-\int 0 \cdot dx\right) dx$$

$$= Cx^{1/2} \ln x$$

$$\therefore H = \langle \{ x^{1/2}, x^{1/2} \ln x \} \rangle$$

- Proponemos ahora la solución particular

$$y_p = \alpha(x)\sqrt{x} + \beta(x)\sqrt{x}\ln x$$

Calculamos $W(\sqrt{x}, \sqrt{x}\ln x)$

$$W = \begin{vmatrix} x^{1/2} & \sqrt{x}\ln x \\ \frac{1}{2x^{1/2}} & \frac{\ln x}{2x^{1/2}} + \frac{1}{x^{1/2}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\ln x}{\cancel{2}} + 1 - \frac{\ln x}{\cancel{2}} = 1 \,//$$

$$\to \alpha(x) = -\int \frac{4x^2 \cdot x^{1/2}\ln x}{1}\, dx$$

$$= -4\int x^{5/2}\ln x\, dx \quad \left| \begin{array}{l} u = \ln x \to du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^{5/2} \to v = \frac{2x^{7/2}}{7} \end{array} \right|$$

$$= -4\left(\frac{2x^{7/2}\ln x}{7} - \int \frac{2}{7}x^{5/2}\, dx\right)$$

$$= -4\left(\frac{2x^{7/2}\ln x}{7} - \frac{4x^{7/2}}{49}\right) \,//$$

$$\beta(x) = \int \frac{4x^2 x^{1/2}}{1}\, dx = 4\int x^{5/2}\, dx = \frac{8}{7}x^{7/2}$$

$$\left(-\frac{8x^{7/2}}{7}\log x + \frac{16}{49}x^{7/2}\right)$$

$$\Rightarrow y_p = 4\left(\frac{4x^{7/2}}{49} - \frac{2x^{7/2}\ln x}{7}\right)x^{1/2}$$

$$+ \frac{8}{7}x^{7/2} \cdot x^{1/2}\ln x$$

$$= 4\left(\frac{4x^4}{49} - \cancel{\frac{2x^4\ln x}{7}}\right) + \cancel{\frac{8}{7}x^4\ln x}$$

$$= \frac{16x^4}{49}$$

$$\therefore y = C_1\sqrt{x} + C_2\sqrt{x}\ln x + \frac{16x^4}{49}$$

P5 Recordar:

1. $\exists x_0, W(x_0) \neq 0 \rightarrow y_1, \ldots, y_n$ son l.i.

2. La implicancia hacia el otro lado de (1) puede no cumplirse

3. Si $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{H}$ de alguna EDO, entonces

$$\exists x_0, W(x_0) \neq 0 \longleftrightarrow W(x) \neq 0, \forall x \leftrightarrow y_1, \ldots, y_n \text{ son l.i.}$$

Nos piden Demostrar que si $y_1, \ldots, y_n$ son l.i. y soluciones de una EDO, entonces

$$W(x) \neq 0, \forall x$$

Hagámoslo por contradicción:

Si $W(x_0) = 0$ para $x_0 \in I$, entonces existe un vector $\vec{\alpha} \neq 0$ t.q.

$$\Phi(x_0)\vec{\alpha} = \vec{0}, \text{ pues } |\Phi(x_0)| = |W(x_0)| = 0$$

Sea $z = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n$, entonces

$$z(x_0) = 0, \quad z'(x_0) = 0, \ldots, z^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Como z es solución de la EDO (pues $\in \mathcal{H}$),

Tenemos un problema de Cauchy con condiciones iniciales nulas $\rightarrow 0 = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n$ con $\alpha_i \neq 0 \rightarrow$ son l.d. $\rightarrow\leftarrow$

[La idea era utilizar la existencia del $\vec{\alpha}$ para demostrar que las funciones eran l.d. por definición]

2. Ulema $\boxed{1}$!

Basta ver existe ~~x~~ x_0 tq $W(x_0)=0$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & \ln x \\ 2x & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = x - 2x \ln x$$

Con $x_0 = 0$, $W(x_0) = 0 \to x, \ln x$

no pueden ser soluciones de una misma EDO,

pues de lo contrario serían l.d.

3. Ambas ecuaciones tienen el mismo espacio de soluciones $H = \langle \{ y_1, y_2 \} \rangle$

$$\to \quad y_1'' + a_1(x) y_1' + a_0(x) y_1 = 0 \qquad y_2'' + a_1(x) y_2' + a_0(x) y_2 = 0$$

$$y_1'' + b_1(x) y_1' + b_0(x) y_1 = 0 \qquad y_2'' + b_1(x) y_2' + b_0(x) y_1 = 0$$

$$\to (a_1 - b_1) y_1' + (a_0 - b_0) y_1 = 0 \qquad \to (a_1 - b_1) y_2' + (a_0 - b_1) y_2 = 0$$

$$\to \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 - b_0 \\ a_1 - b_1 \end{bmatrix} = 0$$

Como $\forall x$, $\det(A) = W(y_1, y_2) \neq 0$, A es invertible

~~4~~1. $\rightarrow a_0(x) = b_0(x),\ a_1(x) = b_1(x),\ \forall x$

4. Usamos notación vectorial en la matriz

$$W(fy_1, fy_2, fy_3) = \begin{vmatrix} f[y_1, y_2, y_3] \\ f'[y_1, y_2, y_3] + f[y_1', y_2', y_3'] \\ f''[y_1, y_2, y_3] + 2f'[y_1, y_2, y_3] + f[y_1'', y_2'', y_3''] \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} f[y_1, y_2, y_3] \\ f'[y_1, y_2, y_3] \\ \ldots \end{vmatrix}}_{} + \begin{vmatrix} f[y_1, y_2, y_3] \\ f[y_1', y_2', y_3'] \\ \ldots \end{vmatrix}$$

$= 0$, pues la 1^{era} y segunda fila son l.d.

- Aquí usamos que el determinante es lineal por filas para $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ tenemos que

$$W(e^x, xe^x, x^2e^x) = e^x W(1, x, x^2)$$

$$= e^x \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2e^x$$

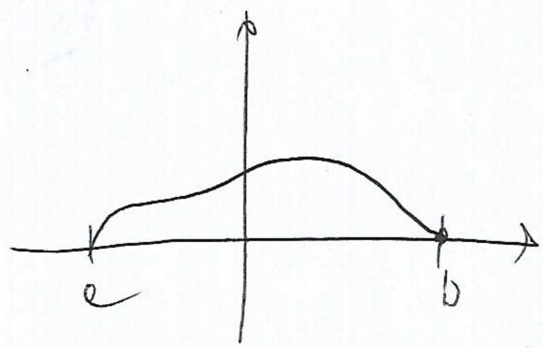
Como no es 0 para $x=0$, son l.i.

P4)
$$W(y_1, y_2; x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

$$W(a) = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = y_1(a)\, y_2'(a)$$

$$- y_2(a)\, y_1'(a)$$

- $\alpha(x) < \beta(x)$ • $y_1(a) = y_2(b) = 0$
- $y_1(x) > 0$, $x \in [a, b]$



$\rightarrow a_0(x) = b_0(x), \ a_1(x) = b_1(x), \ \forall x$ ■

4. Usamos notación vectorial $f\vec{y}$, con $\vec{y} \equiv [y_1, y_2, y_3]$

$$W(fy_1, fy_2, fy_3) = \begin{vmatrix} f\vec{y} \\ f'\vec{y} + f\vec{y}' \\ f''\vec{y} + 2f'\vec{y}' + f\vec{y}'' \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} f\vec{y} \\ f'\vec{y} \\ f''\vec{y} + 2f'\vec{y}' + f\vec{y}'' \end{vmatrix}}_{=0,\ \text{pues } f\vec{y} \text{ y } f'\vec{y} \text{ son l.d.}} + \begin{vmatrix} f\vec{y} \\ f\vec{y}' \\ f''\vec{y} + 2f'\vec{y}' + f\vec{y}'' \end{vmatrix}$$

donde usamos que el det() es multilineal por filas.

$$= \cancelto{0}{\begin{vmatrix} f\vec{y} \\ f\vec{y}' \\ f''\vec{y} \end{vmatrix}} + 2\cancelto{0}{\begin{vmatrix} f\vec{y} \\ f\vec{y}' \\ f'\vec{y}' \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} f\vec{y} \\ f\vec{y}' \\ f\vec{y}'' \end{vmatrix} = f \begin{vmatrix} \vec{y} \\ \vec{y}' \\ \vec{y}'' \end{vmatrix}$$

$$= fW(y_1, y_2, y_3)$$ ■

$\rightarrow W(a) = -\underbrace{y_2(a)}_{>0} \underbrace{y_1'(a)}_{\geq 0} \leq 0$

$W(b) = -\underbrace{y_1'(b)}_{\geq 0} \underbrace{y_2(b)}_{>0} \geq 0$

ii) $W'(x) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$

EDOs $\rightarrow$ $y_1'' = -\alpha y_1$; $y_2'' = -\beta y_2$

$\rightarrow W' = (\alpha - \beta) y_1 y_2$

$\rightarrow \int_a^b W'(x)\,dx = \int_a^b (\alpha(x) - \beta(x))\, y_1(x)\, y_2(x)\,dx$

$\rightarrow W(b) - W(a) = \underbrace{\int_a^b \underbrace{(\alpha(x) - \beta(x))}_{<0} \underbrace{y_1(x)}_{>0} \underbrace{y_2(x)}_{>0}\,dx}_{<0}$

$\rightarrow W(b) < W(a) \rightarrow \leftarrow$ pues $W(b) \geq W(a)$

Así, $y_2(x) > 0 \ \forall x \in [a,b]$ es falso $\rightarrow \exists \bar{x}$ tq $y_2(\bar{x}) = 0$ ∎

iii) Tenemos que $W(a) \leq 0$ y $W(b) \geq 0$, pero $W(x)$ es continua! por TVM

$$\rightarrow \exists\, \overset{*}{x}_0 \text{ t.q. } W(\overset{*}{x}_0) = 0$$

$$\longrightarrow\!\leftarrow$$

esto no puede ocurrir pues y_1 e y_2 son soluciones de una EDO, por lo tanto

$$\exists\, \bar{x} \text{ t.q. } y_2(\bar{x}) = 0$$

$\blacksquare$