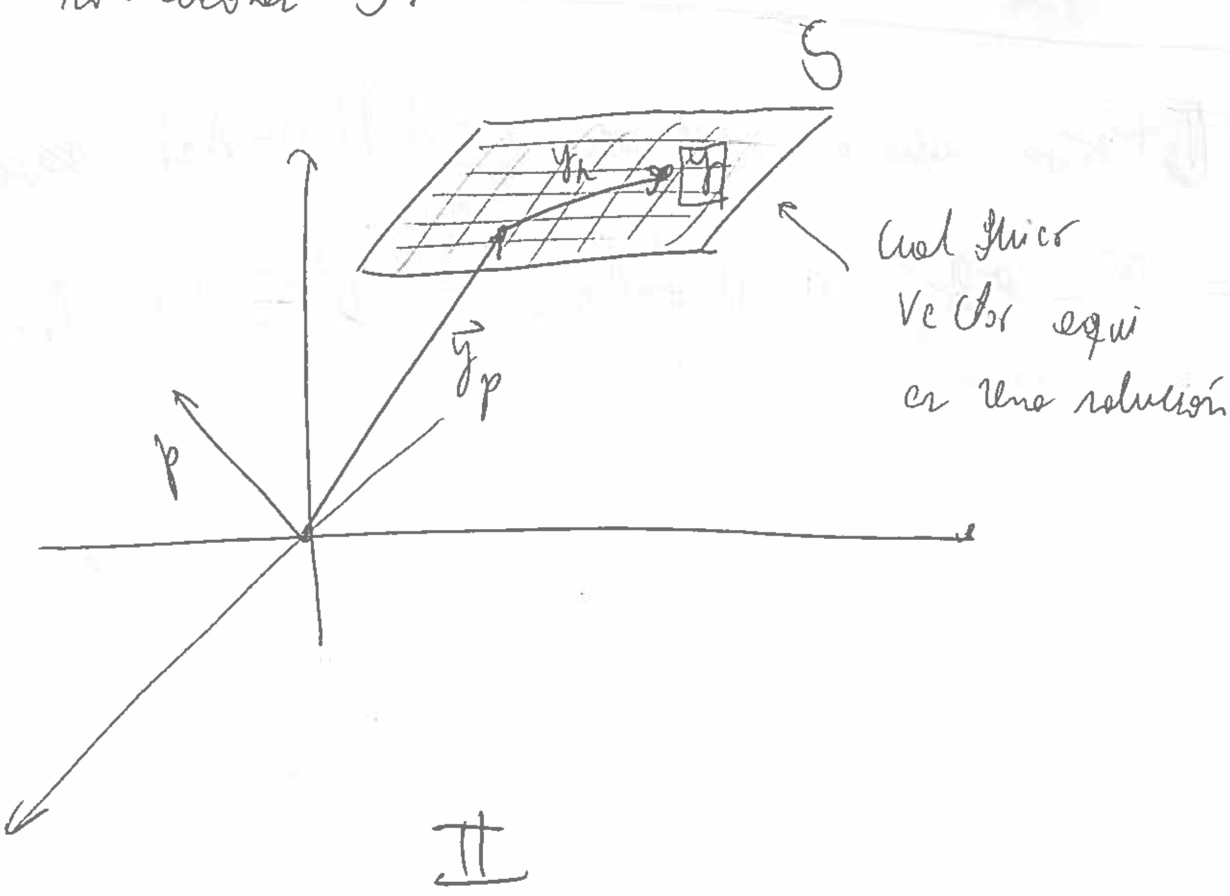
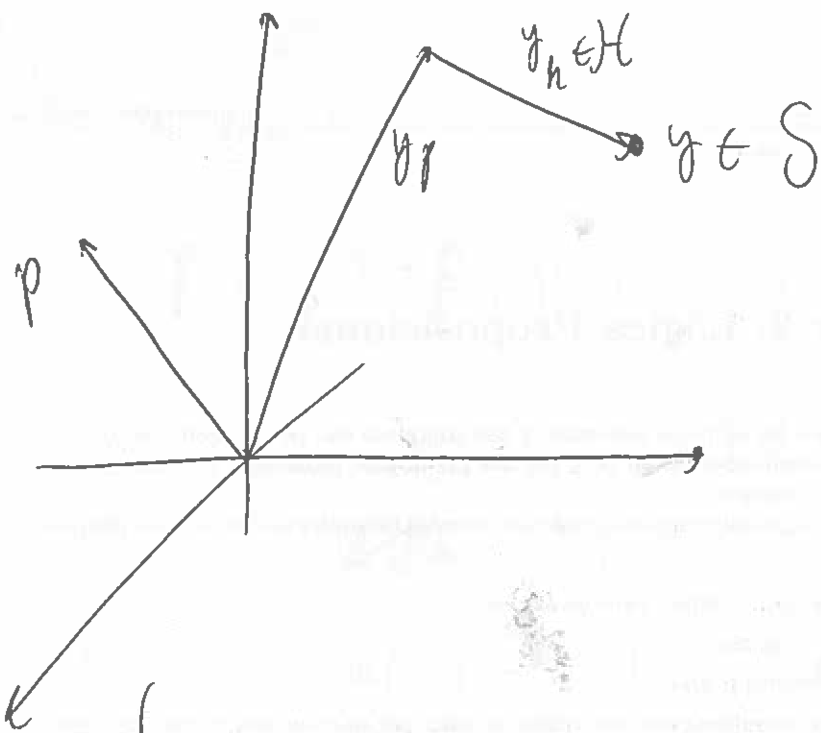
- Una EDO de orden n lineal se puede representar con un operador en $C^n(I)$ lineal, $P(x,D)\,y = p(x)$
- Como $C^n(I)$ es un espacio vectorial donde las funciones son vectores, y
- $P(X,D)$ es un operador lineal, ~~la~~ esto es equivalente a un sistema de ecuaciones en "infinitas" dimensiones
- es decir, estamos buscando un conjunto solución para la ecuación vectorial. a este conjunto le llamaremos S, que es un s.e.v. de $C^n(I)$ trasladado por cierto vector:

- Notemos que las y tales que $P(x,D)\,y \equiv 0$ nos definen un s.e.v., le llamamos $\mathcal{H}$. Sea $y_h \in \mathcal{H}$, e y_p tal que $P(x,D)\,y_p = p(x)$, entonces

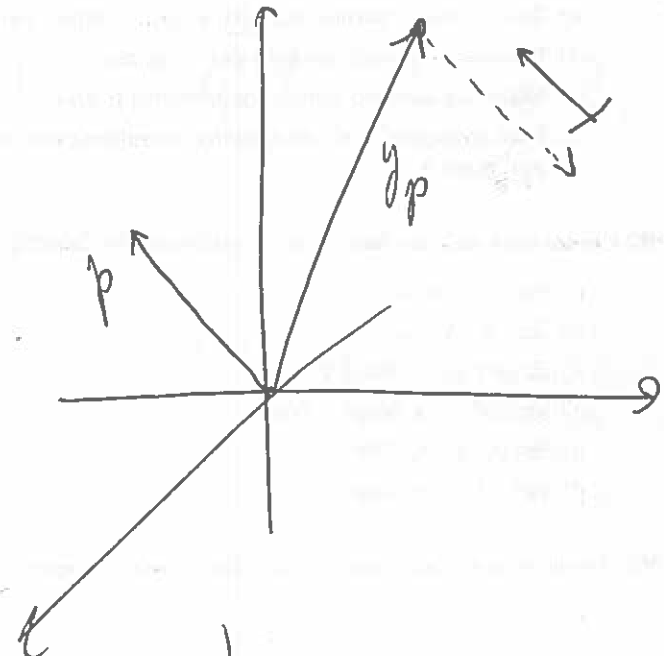
$$P(x,D)\,(y_h + y_p) = p(x),$$

por lo que $y_h + y_p$ también es solución, el espacio definido por esto sería el espacio de las soluciones S:

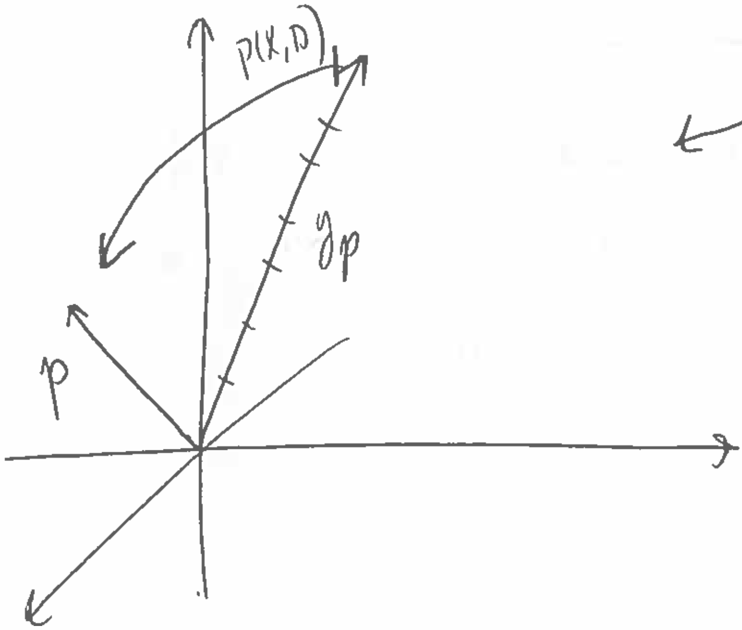




$P(X,D)\, y_h = 0$



$P(X,D)\, y_p = p$



III

~~x:Wed Apr 04 12:48:40 2018:[0|400]~~

Solución homogénea

Para la ecuación

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\,y=0$$

estamos preguntando por los ~~valores~~ propios del operador asociados al valor propio 0.

Dato: el único ~~valor~~ propio del operador $(D-\lambda_2)$ ~~y~~ es el ~~valor~~ propio asociado a λ_2 del operador D; es el y t.q.

$$D = \lambda_2 y$$

es decir, $y = e^{\lambda_2 x}$.

Dato: $y = e^{\lambda_2 x}$ es un vector propio de $(D-\lambda)^2$, (asociado al 0), pero $y = x e^{\lambda x}$ también lo es

Así, tenemos dos posibles casos:

V

$\underline{\lambda_1 = \lambda_2}$

· La solución homogénea pertenece al s.e.v. generado por $\{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}\} = \mathcal{H}$

$\underline{\lambda_1 \neq \lambda_2}$

~~Subcaso 1~~

· La solución homogénea pertenece al s.e.v. generado por $\mathcal{H} = \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$

Subcaso

$\underline{\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \sigma + wi}$

Si este es el caso, $\mathcal{H} = \{e^{\sigma x}(\cos(wx) + i\,\mathrm{Sen}(wx)), e^{\sigma x}(\cos(wx) - i\,\mathrm{Sen}(wx))\} = \{e^{\sigma x}\cos(wx), e^{\sigma x}\mathrm{Sen}(wx)\}$

(i es una constante!!)

$\boxed{P1}$

1. $y'' - 3y' + 4y = 0$

el operador asociado es $D^2 - 3D + 4$

$$= (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)$$

con $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \dfrac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$

$$\rightarrow \mathcal{H} = \left\{ e^{\frac{3}{2}x} \cos\left(\tfrac{\sqrt{7}}{2}x\right), e^{\frac{3}{2}x} \operatorname{Sen}\left(\tfrac{\sqrt{7}}{2}x\right) \right\}$$

2. $\begin{cases} 4y'' - 12y' + 9y = 0 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 2 \end{cases}$

este es un PC, tiene solución única!!

la EDO es $y'' - 3y' + \frac{9}{4} y = 0$

$$\leftrightarrow \left(D^2 - 3D + \tfrac{9}{4}\right) y = 0 \leftrightarrow (D-\lambda)(D-\lambda)y = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-9}}{2} = 3/2 \equiv \lambda$$

$$\rightarrow \mathcal{H} = \left\{ e^{\frac{3}{2}x}, x e^{\frac{3}{2}x} \right\}$$

VII

$$\rightarrow y = C_1 e^{\frac{3}{2}x} + C_2 x e^{\frac{3}{2}x}$$

$$y(0)=1 \rightarrow y(0)=1=C_1$$

$$y'(0)=1 \rightarrow y'(x)\Big|_{x=0} = \left(\frac{3}{2} e^{3/2 x} + C_2\left(e^{\frac{3}{2}x} + \frac{3}{2}x e^{3/2 x}\right)\right)\Big|_x$$

$$= \frac{3}{2} + C_2 = 2$$

$$\rightarrow C_2 = 1/2$$

$$\therefore y(x) = e^{3/2 x} + \frac{x e^{\frac{3}{2}x}}{2} //$$

3. $y'' - 2a y' + a^2 = 0$

$$\leftrightarrow (D^2 - 2a + a^2)y = 0 \rightarrow (D-a)^2 y = 0$$

$$\therefore \mathcal{H} = \{e^{ax}, x e^{ax}\} //$$

P2

$$\boxed{\begin{aligned} \kappa X'' + \lambda X &= 0 \\ T' + \lambda T &= 0 \end{aligned}}$$

1. Las EDO se pueden escribir como

$$\left(D^2 + \frac{\lambda}{\kappa}\right) X = 0$$

$$(D + \lambda) T = 0$$

• $D^2 + \frac{\lambda}{\kappa}$ se factoriza dependiendo del signo de λ!

<u>Caso: $\lambda = -w^2 < 0$</u>

$$\left(D^2 - \frac{w^2}{\kappa}\right) X = 0, \quad (D - w^2) T = 0$$

$$\to \left(D - \frac{w}{\sqrt{\kappa}}\right)\left(D + \frac{w}{\sqrt{\kappa}}\right) X = 0, \quad (D - w^2) T = 0$$

$$\to X(x) = A e^{-\frac{w}{\sqrt{\kappa}} x} + B e^{\frac{w}{\sqrt{\kappa}} x}, \quad T(t) = T_0 e^{w^2 t}$$

$$\therefore u(x,t) = e^{w^2 t}\left(a e^{-\frac{w}{\sqrt{\kappa}} x} + b e^{\frac{w}{\sqrt{\kappa}} x}\right)$$

Físicamente: la temperatura crece con t (poco físico!) $\boxed{X}$

Caso $\lambda = 0$

$$D^2 X = 0 \longrightarrow X(x) = Mx + N$$

$$DT = 0 \longrightarrow T(t) = T_0$$

$$\rightarrow u(x,t) = T_0 (Mx + N)$$

Fisicamente: u es constante en el tiempo

Caso $\lambda = w^2 > 0$

$$\left(D^2 + \frac{w^2}{N}\right) X = 0 \rightarrow \left(D + i\frac{w}{\sqrt{N}}\right)\left(D - i\frac{w}{\sqrt{N}}\right) X = 0$$

$$\left(D + w^2\right) T = 0$$

$$\rightarrow X(x) = C \cos\left(\frac{w}{\sqrt{N}} x\right) + E \operatorname{Sen}\left(\frac{w}{\sqrt{N}} x\right)$$

$$T(t) = T_0 e^{-w^2 t}$$

$$\therefore u(x,t) = e^{-w^2 t}\left[c \cos\left(\frac{w}{\sqrt{N}} x\right) + d \operatorname{Sen}\left(\frac{w}{\sqrt{N}} x\right)\right]$$

Fisicamente: Cuando $t \to \infty$, $u \to 0$ (Temperatura se estabiliza)

X

2. Se agregan las condiciones

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$-w^2 = \lambda < 0$

$$u(0,t) = e^{w^2 t}(a+b) = 0$$

$$u(1,t) = e^{w^2 t}\left(a e^{-\frac{w}{\sqrt{\kappa}}} + b e^{w/\sqrt{\kappa}}\right) = 0$$

$$\rightarrow a+b = a e^{-\frac{w}{\sqrt{\kappa}}} + b e^{w/\sqrt{\kappa}} = 0$$

$$\rightarrow a = -b \rightarrow a\left(e^{-w/\sqrt{\kappa}} - e^{w/\sqrt{\kappa}}\right) = 0$$

$$\rightarrow a = b = 0 //$$

Solo tenemos la solución constante!

$\lambda = 0$

$$u(0,t) = T_0 N = 0 \rightarrow N = 0$$

$$u(1,t) = T_0(M+N) = 0 \rightarrow M = 0$$

ocurre lo mismo

$\underline{\lambda = w^2 > 0}$

$$u(0,t) = e^{-w^2 t}[c + 0] = 0 \to c = 0$$

$$u(1,t) = e^{-w^2 t}\left[d \operatorname{Sen}\left(\frac{w}{\sqrt{N}}\right)\right] = 0$$

$$\to \frac{w}{\sqrt{N}} = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}/0$$

$$\to w^2 = n^2\pi^2 N = \lambda$$

$$\to u(x,t) = d\, e^{-n^2\pi^2 N} \operatorname{Sen}(n\pi x),$$

es solución para todo $n \in \mathbb{Z}/0$!

Wait! Como es que la EDO con las condiciones

$$\left(D^2 + \frac{w^2}{N}\right)X = 0$$

$$X(0) = X(1) = 0$$

tiene mas de una solución!? y el TEU?

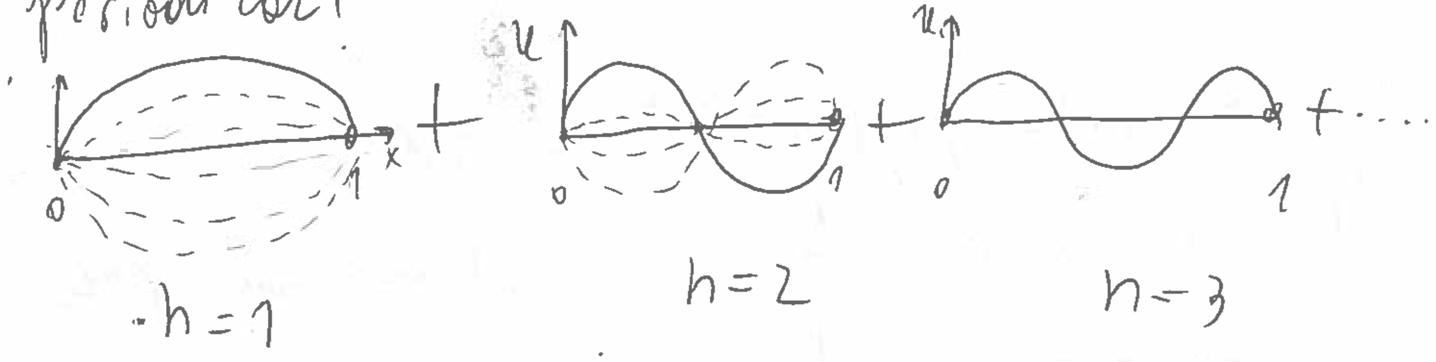
<u>IMPORTANTE!</u> esto <u>NO</u> es un problema de Cauchy, pues no pone una condición por derivada, por lo que el TEU no aplica.

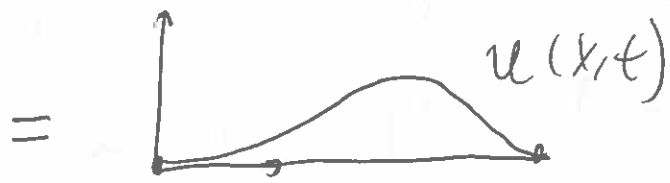
XTL

NOTA: por el principio de superposición, la solución general de la EDP es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \, e^{-n^2\pi^2 t} \, \text{sen}(n\pi x)$$

es decir, una superposición de funciones periodicas!





esto inspira a las series de Fourier!

• para una funcion f, cual es el valor de los d_n??

$\boxed{P4}$ $z(t) = y(e^t)$ es el cambio $x = e^t$

queremos dejar todo en términos de t y z

$$x \to e^t$$

$$(x) \to y(e^t) = z$$

$$y'(x) \to \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{de^t} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{de^t} = \frac{1}{e^t}\frac{dz}{dt}$$

$$y''(x) \to \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{e^t}\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d}{de^t}\left(\frac{1}{e^t}\frac{dz}{dt}\right) =$$

$$= \frac{dt}{de^t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dz}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{e^t}\left(-e^{-t}\frac{dz}{dt} + e^{-t}\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

$$= e^{-2t}\left(z''(t) - z'(t)\right)$$

Así, la EDO es

$$\cancel{(e^t)^2}\cdot\cancel{e^{-2t}}(z''-z') + a\,\cancel{e^t}\cdot\cancel{e^{-t}}\,z' + bz = 0$$

$$\to \quad z''(t) + (a-1)z'(t) + bz(t) = 0$$

2, Con $a=2$ y $b=1$:

$$z'' + z' + z = 0$$

$$\to (D^2 + D + 1)z = 0$$

Las raíces son $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore \mathcal{H} = \left\{ e^{-t/2}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right),\ e^{-t/2}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right\}$$

Así, $z(t) = C_1 (e^{-t})^{1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + C_2 (e^{-t})^{1/2} \operatorname{Sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$

$$\rightarrow y(x) = C_1 x^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + C_2 x^{-1/2} \operatorname{Sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right)$$

- Veran este tipo de ecuaciones mas veces en su vida. es util recordar el cambio de variable!