Auxiliar 6: Preparación C2

Cosas Pendientes + Extras

Profesor: Roberto Cortez
Auxiliar: Miguel Sepúlveda

P1.- Encuentre la solución general de

1. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos(2x)$
2. $(D-2)^3(D^2+9)y = x^2e^{2x} + x\sin(3x)$

P2.-

1. Demuestre que $\{x^2, lnx\}$ no pueden ser soluciones de una misma ecuación diferencial de la forma
$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0$$
con f y g dos funciones continuas definidas en $\mathbb{R}_+$.
2. Si las ecuaciones $y'' + a_1(x)y' + a_0(x) = 0$ y $y'' + b_1(x)y' + b_1(x) = 0$ con $x \in [a,b]$ tienen las mismas soluciones, pruebe que $a_1(x) = b_1(x)$ y $a_0(x) = b_0(x)$.
3. Pruebe que $W(fy_1, fy_2, fy_3) = f^3W(f_1, f_2, f_3)$. Utilice esto para demostrar que $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ son linealmente independientes.

P3.-
Resuelva la ecuación

$$\begin{cases} y'' + y = f(x), \; f(x) = \begin{cases} x/2, \; 0 \leq x \leq \pi \\ \pi/2, \; x > \pi \end{cases} \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 1 \end{cases}$$

P4.-

1. Considere la ecuación a coeficientes constantes reales:
$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^N y}{dx^N} = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

Sea $p(\lambda)$ su polinomio característico, y suponga que $\mu = \alpha + i\beta$ es raiz de grado 3 del polinomio carácteristico; es decir que $p(\mu) = 0$, $p'(\mu) = 0$ y $p''(\mu) = 0$ pero $p'''(\mu) \neq 0$. Demuestre que

$$y_p(x) = Re\left(\frac{x^3 e^{\mu x}}{p'''(\mu)}\right)$$

Indicación: Demuestre por inducción que para todo $k = 0, 1, ...$ se tiene que

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^3 e^{\mu x}) = e^{\mu x}(\mu^k x^3 + 3k\mu^{k-1}x^2 + 3k(k-1)\mu^{k-2}x + k(k-1)(k-2)\mu^{k-3})$$

2. Encuentre la solución general de la ecuación

$$y^{(6)} - 12y^{(4)} - 184y^{(3)} + 315y^{(2)} - 300y^{(1)} + 125y^{(0)} = e^{2x}\cos x$$

Usando el hecho de que $2 + i$ es una raíz de multiplicidad 3 para el polinomio carácterístico asociado

P5.-

Sea ψ una función definida en $\mathbb{R}$, con ψ' continua en $\mathbb{R}$. Si $\psi(0) = 1$ y $\psi'(0) = 0$, se pide encontrar ψ que satisface las siguientes ecuaciones diferenciales;

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\psi}{dx^2} + M(1-R)\psi = 0 \text{ para } x \in (-\infty, 0], \\
\frac{d^2\psi}{dx^2} + MR\psi = 0 \text{ para } x \in (0, 1), \\
\frac{d^2\psi}{dx^2} + M(1-R)\psi = 0 \text{ para } x \in [1, \infty)
\end{aligned}$$

Donde M y R son constantes positivas, con $0 < R < 1$. Haga un bosquejo de ψ.

P6.-

Nuestro propósito es resolver la ecuación de Cauchy-Euler de segundo orden para y(x), dada por $x^2y'' + axy' + by = 0$, $x > 0$, y $a, b \in \mathcal{R}$. Para esto siga los siguientes pasos:

1. Considerando el cambio de variable $z(t) = y(e^t)$, demuestre que la ecuación se reduce a:

$$z''(t) + (a-1)z'(t) + bz(t) = 0$$

2. Encuentre la solución general de la EDO homogénea a coeficientes constantes de la parte anterior para $a = 2$ y $b = 1$, y recupere la solución de la EDO original.