5. Para $x > 0$, considere un operador diferencial lineal de orden n de la forma

$$P(xD) = \prod_{j=1}^{n}(xD - \lambda_j),$$

donde $(xD-\lambda_j)y = xy' - \lambda_j y$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son **todos diferentes**. Nuestro propósito es resolver la EDO homogénea

$$P(xD)y = 0, \quad \text{con} \quad x > 0. \qquad (H)$$

(1) Verifique que el orden de la composición en $P(xD)$ no importa. Para ello demuestre que

$$(xD - \lambda_i)(xD - \lambda_j)y = (xD - \lambda_j)(xD - \lambda_i)y.$$

(2) Compruebe las propiedades de traslación siguientes:

$$(xD - \lambda)x^{\beta} f = x^{\beta}(xD - \lambda + \beta)f$$

y en particular

$$(xD - \lambda)x^{\beta} = (\beta - \lambda)x^{\beta}.$$

(3) Concluya que x^{λ_j} es solución de (H) para $j = 1, \ldots, n$.

(4) Demuestre ahora que $\{x^{\lambda_1}, \ldots, x^{\lambda_n}\}$ es un conjunto de funciones linealmente independientes. Quizá le sea útil saber que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1(\lambda_1 - 1)\ldots(\lambda_1 - (n-2)) & \ldots & \lambda_n(\lambda_n - 1)\ldots(\lambda_n - (n-2)) \end{vmatrix}$$

es distinto de cero.

(5) Demuestre que las funciones $x^{\lambda_1}, \ldots, x^{\lambda_n}$ generan el espacio solución de (H). Deduzca que (H) tiene como solución

$$y_h(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2} + \ldots + c_n x^{\lambda_n} \quad \text{para} \quad x > 0,$$

donde $c_j, j = 1, \ldots, n$ son constantes reales.

(6) Usando sucesivamente las propiedades de traslación, resuelva la siguiente ecuación no homogénea

$$(xD - 3)(xD - 4)(xD - 5)(x^2 y) = x^{3/2}, \quad \text{con} \quad x > 0.$$