Auxiliar 5

Resolución de Ecuaciones de Orden Superior

Profesor: Roberto Cortez
Auxiliar: Miguel Sepúlveda

P1.- Sea P algún operador diferencial lineal, $p(\lambda)$ su polinomio característico evaluado en $\lambda \in \mathbb{C}$, demuestre entonces que

1. $P(D+\lambda)1 = p(\lambda)$
2. $P(D)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}P(D+\lambda)1 = e^{\lambda x}p(\lambda)$
3. $P(D)(f(x)e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}P(D+\lambda)f(x)$

Para el ítem (c), ¿Que ocurre si $f(x) = x^k$, λ es raíz de p con multiplicidad m? ¿Que debe cumplir k para que $P(D)(f(x)e^{\lambda x})$ sea nulo (Es decir, que $f(x)e^{\lambda x}$ sea solución de la EDO homogénea asociada?

P2.- Encuentre el espacio de soluciones homogéneas para las siguientes ecuaciones de orden superior:

1. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$
2. $y^{(3)} + 2y'' + 2y' = 0$
3. $y^{(4)} - y^{(3)} = 0$
4. $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$

P3.- Encuentre la solución general de

1. $y^{(3)} + y'' = 8e^x + 4x^2$
2. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos(2x)$
3. $(D-2)^3(D^2+9)y = x^2e^{2x} + x\sin(3x)$

P3.- Usando variación de parámetros resuelva:

$$y''' + y' = \frac{1}{1+e^x}$$

P4.-

1. Considere la ecuación a coeficientes constantes reales:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^N y}{dx^N} = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

Sea $p(\lambda)$ su polinomio característico, y suponga que $\mu = \alpha + i\beta$ es raiz de grado 3 del polinomio carácteristico. Demuestre que

$$y_p(x) = Re\left(\frac{x^3 e^{\mu x}}{p'''(\mu)}\right)$$

Indicación: Demuestre por inducción que para todo $k = 0, 1, ...$ se tiene que

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^3 e^{\mu x}) = e^{\mu x}(\mu^k x^3 + 3k\mu^{k-1}x^2 + 3k(k-1)\mu^{k-2}x + k(k-1)(k-2)\mu^{k-3})$$

2. Encuentre la solución general de la ecuación

$$y^{(6)} - 12y^{(4)} - 184y^{(3)} + 315y^{(2)} - 300y^{(1)} + 125y^{(0)} = e^{2x} \cos x$$

Usando el hecho de que $2 + i$ es una raíz de multiplicidad 3 para el polinomio carácterístico asociado