MA2601-2015/1 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Marcelo Tapia G.
Auxiliares: Felipe Matus D. José Palacios A.

Método Coeficientes Indeterminados

Consideremos la EDO

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad x \in I \subset \mathbb{R}$$

Este método consiste en suponer la **forma** que tendrá una solución particular y_p de la ecuación, para algunos tipos de $f(x)$.

Notemos que podemos obtener n funciones y_i *linealmente independientes* que generan el espacio de soluciones $\mathcal{H}$ asociado a la EDO homogénea respectiva.
Una vez conocidas las funciones $y_1, ..., y_n$ podemos encontrar una solución particular por medio de este método, considerando la restricción de que funciona en los casos que $f(x)$ tiene alguna de las siguientes formas:

1. $f(x) = e^{\omega x} p_1(x)$
2. $f(x) = e^{\omega x} p_1(x) cos(\alpha x)$
3. $f(x) = e^{\omega x} p_1(x) sen(\alpha x)$
4. $f(x) = e^{\omega x} p_1(x) cos(\alpha x) + e^{\omega x} p_2(x) sen(\alpha x)$

Donde $\omega, \alpha \in \mathbb{R}$ y p_1, p_2 son polinomios cuyos grados pueden o no ser distintos.

Tal como para la solución homogénea, identificamos el "valor propio" (λ) correspondiente a la función $f(x)$ del lado derecho, notemos que $\omega = Re(\lambda), \alpha = Im(\lambda)$.
Para cada caso, se propone una solución y_p que corresponda. Supongamos $gr(p_1) = P,\ gr(p_2) = Q$ (grado de los polinomios):

1. $y_p = x^s e^{\omega x}(A_0 + A_1 x + ... + A_P x^P)$
2. $y_p = x^s e^{\omega x}(A_0 + A_1 x + ... + A_P x^P) cos(\alpha x) + x^s e^{\omega x}(B_0 + B_1 x + ... + B_P x^P) sen(\alpha x)$
3. $y_p = x^s e^{\omega x}(A_0 + A_1 x + ... + A_P x^P) cos(\alpha x) + x^s e^{\omega x}(B_0 + B_1 x + ... + B_P x^P) sen(\alpha x)$
4. $y_p = x^s e^{\omega x}(A_0 + A_1 x + ... + A_\nu x^\nu) cos(\alpha x) + x^s e^{\omega x}(B_0 + B_1 x + ... + B_\nu x^\nu) sen(\alpha x)$

Aquí, ν corresponde al máximo grado de los polinomios involucrados, es decir, $\nu = max\{P, Q\}$.
Además $s \geq 0$ es la mínima potencia de x necesaria para que las funciones que definen y_p sean *linealmente independientes* con las que generan el espacio homogéneo. Notemos que $s > 0$ cuando el λ asociado ya era valor característico de la EDO Homogénea (y por lo tanto la solución que proponemos está dentro de la solución y_h).

Los coeficientes $A_0, ..., A_P$ y $B_0, ..., B_Q$ son las constantes indeterminadas que dan el nombre al método y que deben ser encontradas. Para ello se obtiene un sistema de ecuaciones al reemplazar y_p en la EDO.

Es decir, para resolver la ecuación por este método, basta seguir los siguientes pasos:

1. Encontrar base para el espacio $\mathcal{H}$.
2. Proponer y_p usando la forma correspondiente al término NO Homogéneo de la EDO, considerando que se debe mantener la independencia lineal con las funciones que generan $\mathcal{H}$.
3. Obtener las n derivadas de y_p y reemplazarlas en la EDO. Comparando los coeficientes del lado derecho se obtienen los valores de TODOS los coeficientes indeterminados.

Notas.- Hay que tener cuidado con algunas cosas:

1. Si $f(x)$ no tiene alguna de las formas descritas anteriormente (por ejemplo $f(x) = tan(x)$), el método en general NO funciona.
2. Cuando p_1 ó p_2 son distintos de 1, se asume que el polinomio propuesto contiene TODOS los términos, hasta el grado correspondiente. Esto es, si $f(x) = 13e^{2x}x^3$, entonces se asume que $y_p = e^{2x}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3)$
3. Si $f(x)$ es suma de funciones que aprueban para usar este método, entonces por el principio de superposición, podemos separar los términos asociados al mismo λ y proponer una solución particular para cada uno de ellos, para posteriormente sumarlos todos. Es decir, si $f(x) = 3sen(2x) - e^x x - cos(2x)$ separamos $f_1(x) = 3sen(2x) - cos(2x)$ (que tiene $\lambda_1 = \pm 2i$) para el cual se propone y_p^1 y $f_2(x) = -e^x x$ ($\lambda_2 = 1$) con solucion particular y_p^2. Así finalmente $y_p = y_p^1 + y_p^2$.
4. **Resonancia** Se dice que un lado derecho causa Resonancia en la EDO cuando su valor propio asociado ya formaba parte de la Ecuación Homogénea, es decir, cuando $s > 0$.

   Supongamos una EDO $y'' - 4y' + 3y = 3xe^x$.
   El polinomio característico de la EDO Homogénea asociada es

   $$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$
   $$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$
   $$\lambda_1 = 3 \ , \lambda_2 = 1$$

   Por lo tanto $y_h = c_1e^{3x} + c_2e^x$
   Dada la forma del lado derecho, la solución propuesta es:

   $$y_p = x^s e^x(A_0 + A_1x)$$
   $$\lambda_{asociado} = 1$$

   Para determinar el valor de s notamos que debe cumplirse $s > 0$ pues $\lambda_{asociado} = 1$, que ya era valor característico de la EDO Homogénea. Como la multiplicidad de este valor en la solución homogénea es 1, entonces $s = 1$ y finalmente

   $$y_p = e^x(A_0 + A_1x)x$$

   Que genera soluciones linealmente independientes con y_h.
   Para terminar, se deriva dos veces la solución propuesta y se obtienen los valores de A_0 y A_1 al reemplazar en la EDO y comparar los coeficientes.