

• Una EDO de orden n lineal se puede representar con un operador en $C^n(I)$ lineal, $P(x, D)y = p(x)$

• Como $C^n(I)$ es un espacio vectorial donde las funciones son vectores, y

• $P(x, D)$ es un operador lineal, ~~lo~~ esto es equivalente a un sistema de ecuaciones en "infinitas" dimensiones

• es decir, estamos buscando un conjunto solución para la ecuación vectorial. a este conjunto de soluciones S , $\forall v$ es un S.E.V. de $C^n(I)$ tras hecho por cierto vector.

• Notamos que los y tales que

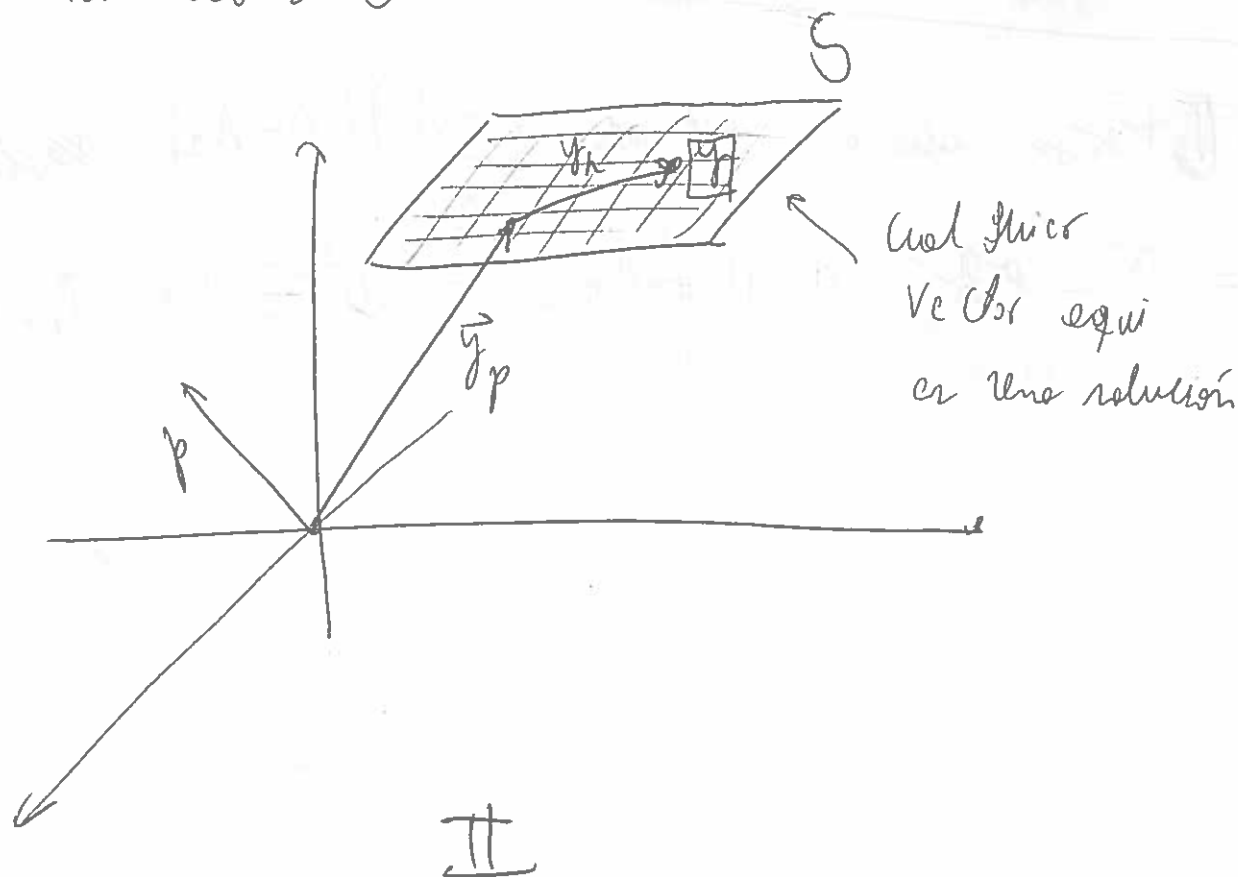
$$P(x, D)y \equiv 0 \text{ nos definen un S.E.V.}$$

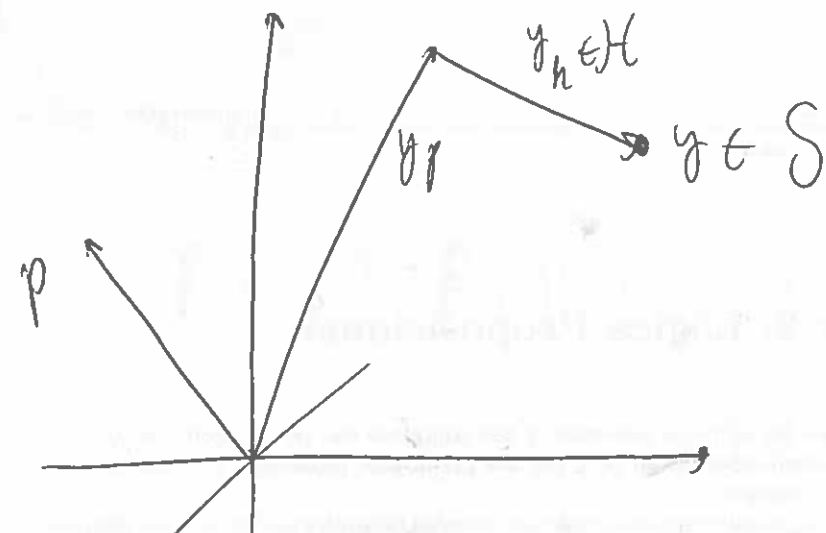
o homomorfismo $\mathcal{H}$. Sea $y_h \in \mathcal{H}$, e y_p tal que

$$P(x, D)y_p = p(x), \text{ entonces}$$

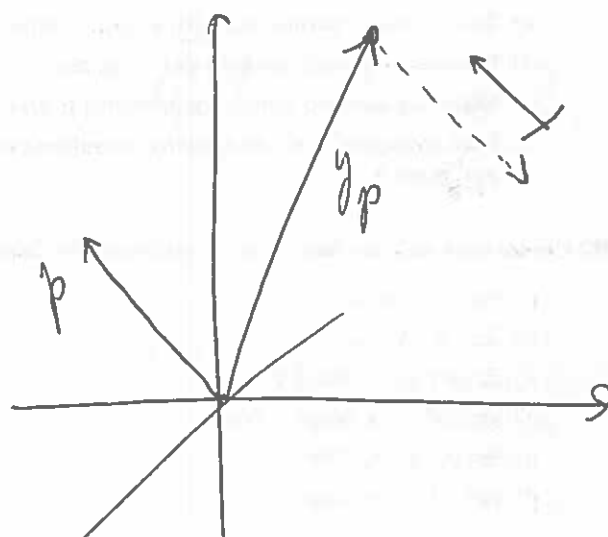
$$P(x, D)(y_h + y_p) = p(x),$$

por lo que $y_h + y_p$ también es solución, el espacio definido por esta suma es el espacio de las soluciones S :

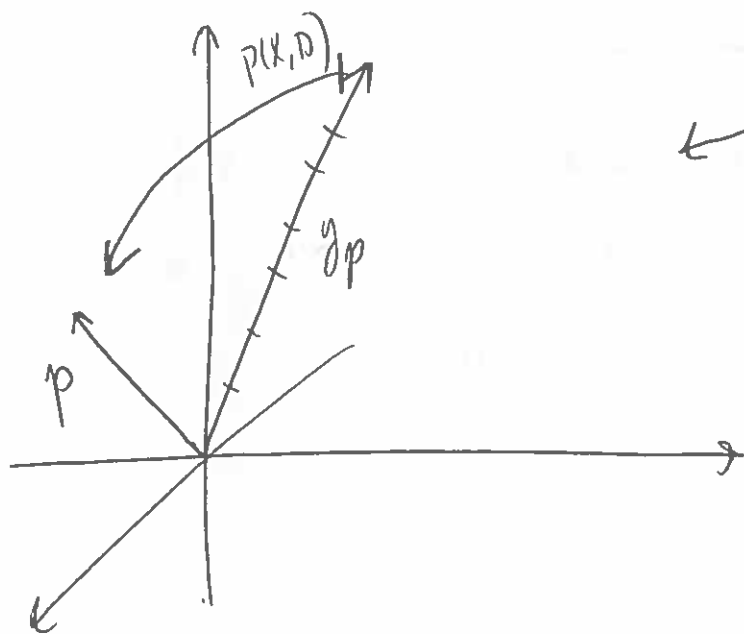




$P(x, D) y_h = 0$



$P(x, D) y_p = p$



III

Solu ción homogenea

Para la ecuación

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = 0$$

estamos preguntando por los ~~valores~~ valores propios del operador cuando el valor propio es 0.

Dato: el único ~~valor~~ valor propio del operador

$(D - \lambda_2)y \neq 0$ es el ~~valor~~ valor propio asociado a λ_2 del operador D , es el
y t.g. $D = \lambda_2 y$

es decir, $y = e^{\lambda_2 x}$

Dato: $y = e^{\lambda_2 x}$ es un valor propio de $(D - \lambda_1)^2$, cuando
es 0), pero $y = x e^{\lambda_2 x}$ también lo es

Así, tenemos dos posibles casos:

V

$$\underline{\lambda_1 = \lambda_2}$$

• La solución homogénea pertenece al s.e.v.
generado por $\{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}\} = \mathcal{H}$

$$\underline{\lambda_1 \neq \lambda_2}$$

~~8/11/19/1~~

• La solución homogénea pertenece al s.e.v.
generado por $\mathcal{H} = \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$

Subcaso

$$\underline{\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \sigma + \omega i}$$

Si este es el caso, $\mathcal{H} = \{e^{\sigma x} (\cos(\omega x) + i \sin(\omega x)),$
 $e^{\sigma x} (\cos(\omega x) - i \sin(\omega x))\} = \{e^{\sigma x} \cos(\omega x), e^{\sigma x} \sin(\omega x)\}$
 (i es una constante!!)

VI

P1

$$1. y'' - 3y' + 4y = 0$$

el operador asociado es $D^2 - 3D + 4$

$$= (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)$$

$$\text{con } \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

$$\rightarrow \mathcal{H} = \left\{ e^{\frac{3}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right), e^{\frac{3}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) \right\}$$

$$2. \begin{cases} 4y'' - 12y' + 9y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}$$

este es un PC, tiene solución única!!

$$\text{La EDO es } y'' - 3y' + \frac{9}{4}y = 0$$

$$\Leftrightarrow (D^2 - 3D + \frac{9}{4})y = 0 \Leftrightarrow (D - \lambda)(D - \lambda)y = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-9}}{2} = 3/2 = \lambda$$

$$\rightarrow \mathcal{H} = \left\{ e^{\frac{3}{2}x}, x e^{\frac{3}{2}x} \right\} \quad \underline{\text{VII}}$$

$$\rightarrow y = C_1 e^{\frac{3}{2}x} + C_2 x e^{\frac{3}{2}x}$$

$$y(0)=1 \rightarrow y(0)=1 = C_1$$

$$y'(0)=1 \rightarrow y'(x) \Big|_{x=0} = \left(\frac{3}{2} e^{\frac{3}{2}x} + C_2 \left(e^{\frac{3}{2}x} + \frac{3}{2} x e^{\frac{3}{2}x} \right) \right) \Big|_x$$

$$= \frac{3}{2} + C_2 = 2$$

$$\rightarrow C_2 = 1/2$$

$$\therefore y(x) = e^{\frac{3}{2}x} + \frac{x e^{\frac{3}{2}x}}{2}$$

$$3. \quad y'' - 2a y' + a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (D^2 - 2aD + a^2)y = 0 \rightarrow (D - a)^2 y = 0$$

$$\therefore H = h e^{ax}, x e^{ax} h$$

P2

$$\begin{cases} KX'' + \lambda X = 0 \\ T' + \lambda T = 0 \end{cases}$$

1. Con EDO se pueden escribir como

$$(D^2 + \frac{\lambda}{K})X = 0$$

$$(D + \lambda)T = 0$$

• $D^2 + \frac{\lambda}{K}$ se factoriza dependiendo del signo de λ

Como: $\lambda = -\omega^2 < 0$

$$(D^2 - \frac{\omega^2}{K})X = 0, (D - \omega^2)T = 0$$

$$\rightarrow (D - \frac{\omega}{\sqrt{K}})(D + \frac{\omega}{\sqrt{K}})X = 0, (D - \omega^2)T = 0$$

$$\rightarrow X(x) = A e^{-\frac{\omega}{\sqrt{K}}x} + B e^{\frac{\omega}{\sqrt{K}}x}, T(t) = T_0 e^{\omega^2 t}$$

$$\therefore u(x, t) = e^{\omega^2 t} (a e^{-\frac{\omega}{\sqrt{K}}x} + b e^{\frac{\omega}{\sqrt{K}}x})$$

Físicamente: la temperatura crece con t (pero físico!) IX

Caso $\lambda = 0$

$$D^2 X = 0 \rightarrow X(x) = Mx + N$$

$$D T = 0 \rightarrow T(t) = T_0$$

$$\rightarrow u(x, t) = T_0 (Mx + N)$$

Físicamente: u es constante en el tiempo

Caso $\lambda = \omega^2 > 0$

$$(D^2 + \frac{\omega^2}{N}) X = 0 \rightarrow (D + i \frac{\omega}{\sqrt{N}}) (D - i \frac{\omega}{\sqrt{N}}) X = 0$$

$$(D + \omega^2) T = 0$$

$$\rightarrow X(x) = C \cos\left(\frac{\omega}{\sqrt{N}} x\right) + E \sin\left(\frac{\omega}{\sqrt{N}} x\right)$$

$$T(t) = T_0 e^{-\omega^2 t}$$

$$\therefore u(x, t) = e^{-\omega^2 t} \left[C \cos\left(\frac{\omega}{\sqrt{N}} x\right) + d \sin\left(\frac{\omega}{\sqrt{N}} x\right) \right]$$

Físicamente: Cuando $t \rightarrow \infty$, $u \rightarrow 0$ (Temperatura se estabiliza)

X

2. Se agregan las condiciones

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$\underline{-w^2 = \lambda < 0}$$

$$u(0,t) = e^{w^2 t} (a+b) = 0$$

$$u(1,t) = e^{w^2 t} \left(a e^{-\frac{w}{\sqrt{\pi}}} + b e^{\frac{w}{\sqrt{\pi}}} \right) = 0$$

$$\rightarrow a+b = a e^{-\frac{w}{\sqrt{\pi}}} + b e^{\frac{w}{\sqrt{\pi}}} = 0$$

$$\rightarrow a = -b \rightarrow a \left(e^{-\frac{w}{\sqrt{\pi}}} - e^{\frac{w}{\sqrt{\pi}}} \right) = 0$$

$$\rightarrow a = b = 0 //$$

Solo tenemos la solución constante!

$$\underline{\lambda = 0}$$

$$u(0,t) = T_0 N = 0 \rightarrow N = 0$$

$$u(1,t) = T_0 (M+N) = 0 \rightarrow M = 0$$

seu yre lo misha

XI

$$\underline{\lambda = \omega^2 > 0}$$

$$u(0, t) = e^{-\omega^2 t} [c + 0] = 0 \rightarrow c = 0$$

$$u(1, t) = e^{-\omega^2 t} \left[d \sin\left(\frac{\omega}{\sqrt{K}}\right) \right] = 0$$

$$\rightarrow \frac{\omega}{\sqrt{K}} = h\pi, \quad h \in \mathbb{Z}/0$$

$$\rightarrow \omega^2 = h^2 \pi^2 K = \lambda$$

$$\rightarrow u(x, t) = d e^{-h^2 \pi^2 K t} \sin(h\pi x),$$

es solución para todo $h \in \mathbb{Z}/0$

Weit! Como es justo la EDO con las condiciones

$$\left(D^2 + \frac{\omega^2}{K}\right)X = 0$$

$$X(0) = X(1) = 0$$

¿tiene más de una solución!? y el TFEU?

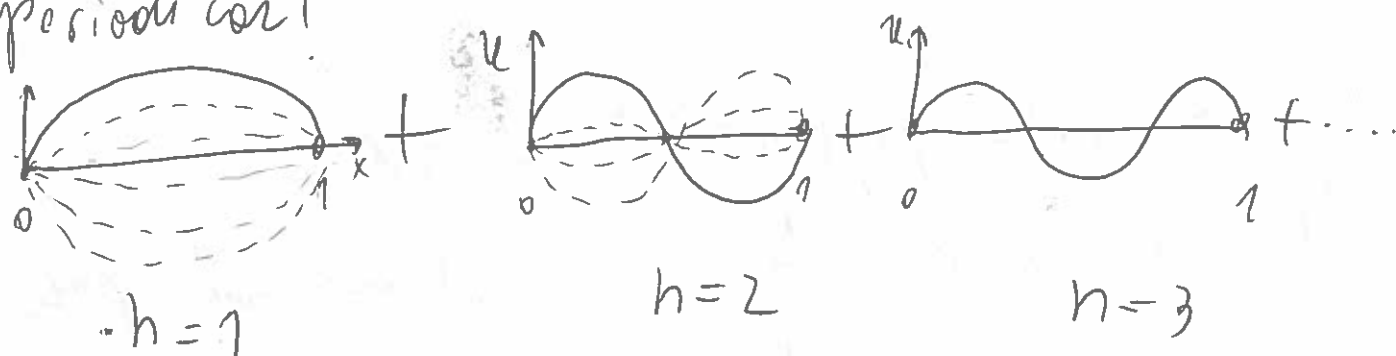
IMPORTANT! esto NO es un problema de Cauchy, pues le pone una condición por derivada, por lo que el TFEU no aplica.

XTL

NOTA: por el principio de superposición,
la solución general de la EDP es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

es decir, una superposición de funciones
periódicas!



esto inspira a las series de Fourier!

• para una función f , ¿cuál es el valor
de los d_n ??

XIII

$$\rightarrow z = -\frac{2}{5} e^{-2x} (\cos x - 3 \sin x) + C_1 e^{-3x}$$

$$\bullet \text{ ~~Encontrar~~ } y' + 2y = -\frac{2}{5} e^{-2x} (\cos x - 3 \sin x) + C_1 e^{-3x} / e^{2x}$$

$$(y e^{2x})' = -\frac{2}{5} (\cos x - 3 \sin x) + C_1 e^{-x} \int dx$$

$$\textcircled{1} y e^{2x} = -\frac{2}{5} (\sin x + 3 \cos x) - C_1 e^{-x} + C_2$$

$$\rightarrow y(x) = -\frac{2}{5} e^{-2x} (\sin x + 3 \cos x) \} y_p$$

$$+ C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} \} y_h$$

P41 $z(t) = y(e^t)$ es el cambio $x = e^t$
 Queremos de ser todo en términos de t y z

$$x \rightarrow e^t$$

$$y(x) \rightarrow y(e^t) = z$$

$$y'(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{de^t} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{de^t} = \frac{1}{e^t} \frac{dz}{dt}$$

$$y''(x) \rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{e^t} \frac{dz}{dt} \right) = \frac{d}{de^t} \left(\frac{1}{e^t} \frac{dz}{dt} \right) =$$

$$= \frac{dt}{de^t} \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dz}{dt} \right)$$

$$= \frac{1}{e^t} \left(-e^{-t} \frac{dz}{dt} + e^{-t} \frac{d^2 z}{dt^2} \right)$$

$$= e^{-2t} (z''(t) - z'(t))$$

Als, b EDO es

$$\cancel{(e^t)^2} \cdot \cancel{e^{-2t}} (z'' - z') + \cancel{e} \cdot \cancel{e^t} \cdot \cancel{e^{-t}} z' + b z = 0$$

$$\rightarrow z''(t) + (e-1) z'(t) + b z(t) = 0$$

2. für $a=2$ und $b=1$:

$$z'' + z' + z = 0$$

$$\rightarrow (D^2 + D + 1) z = 0$$

$$\text{für reelles } \text{son } \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \mathcal{H} = \left\{ e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right\}$$

$$\text{Así, } z(t) = C_1 (e^{-t})^{1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + C_2 (e^{-t})^{1/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$

$$\rightarrow y(x) = C_1 x^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + C_2 x^{-1/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right)$$

- Verar este tipo de ecuaciones mas
Verar en su vide. es util recordar
el cambio de variable!

P5 Sean y_1 e y_2 estas soluciones linealmente
independientes, entonces

$$\cancel{(Q_1 - b_1) y_1'}$$

$$y_1'' + Q_1 y_1' + Q_0 = 0 \quad y_2'' + Q_1 y_2' + Q_0 = 0$$

$$y_1'' + b_1 y_1' + b_0 = 0 \quad y_2'' + b_1 y_2' + b_0 = 0$$

$$\rightarrow (Q_1 - b_1) y_1' + (Q_0 - b_0) = 0 \quad (Q_1 - b_1) y_2' + (Q_0 - b_0) = 0$$

$$\text{Si } Q_1 \neq b_1 \rightarrow y_1' = y_2', \text{ para algùn } x$$

Pues de ser así, como $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$, serian l.d.o

$$\rightarrow Q_1 = b_1 \rightarrow Q_0 - b_0 = 0, \quad \forall x //$$