Auxiliar 4

Variación de Parámetros e Independencia Lineal

Profesor: Roberto Cortez
Auxiliar: Miguel Sepúlveda

P1.-

Resuelva las siguientes EDOs lineales no homogéneas de segundo orden:

1. $y'' + 5y' + 6y = 4\sin x$
2. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$

P2.- Un péndulo simple sujeto de un techo horizontal, está formado por una cuerda de largo h y una masa m sujeta a su extremo. El ángulo entre la cuerda y la vertical puede ser modelado según la ecuación

$$mh\theta'' = -mg\theta - \mu h\theta'$$

1. En un laboratorio se modela una situación ideal con los parámetros $m = 1$, $\mu = 2$, $h = 4$, $g = 8$. ¿Cuál será el comportamiento del péndulo en todo instante de tiempo, si consideramos $\theta(0) = \theta_0$ y $\theta'(0) = 0$?
2. A partir del instante $t = 2\pi$ una fuerza externa dada por

   $$F(t) = e^{-t}sin(t)$$

   excita el movimiento oscilatorio del péndulo. Considerando la condición inicial dada por la parte anterior, ¿Cuál sería el comportamiento del péndulo para $t > 2\pi$?

P3.- Considere la siguiente ecuación:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

1. Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones no triviales de la ecuación homogénea. A partir de la formula de Abel, determine $y_2(x)$ en función de $y_1(x)$
2. Con lo anterior, encuentre la solución general de la EDO

   $$4x^2y'' + y = 4x^2$$

   Sabiendo que una solución homogénea es $y = \sqrt{x}$

P4.-

1. Demuestre que si y_1 e y_2 son soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial homogénea, entonces $W(y_1, y_2; x) \neq 0$, para todo $x \in I$

2. Demuestre que $\{x^2, lnx\}$ no pueden ser soluciones de una misma ecuación diferencial de la forma
$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0$$
con f y g dos funciones continuas definidas en $\mathbb{R}_+$.

3. Si las ecuaciones $y'' + a_1(x)y' + a_0(x) = 0$ y $y'' + b_1(x)y' + b_1(x) = 0$ con $x \in [a, b]$ tienen las mismas soluciones, pruebe que $a_1(x) = b_1(x)$ y $a_0(x) = b_0(x)$.

4. Pruebe que $W(fy_1, fy_2, fy_3) = f^3W(f_1, f_2, f_3)$. Utilice esto para demostrar que $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ son linealmente independientes.

P5.- Sean y_1 e y_2 soluciones de las ecuaciones

$$y_1'' + \alpha(x)y_1 = 0,\ x \in [a, b]$$

$$y_2'' + \beta(x)y_2 = 0,\ x \in [a, b]$$

Donde α y β son funciones continuas tales que $\alpha(x) < \beta(x)$. Suponemos además que $y_1(a) = y_1(b) = 0$ e $y_1(x) > 0$ en $[a, b]$. Demostraremos que necesariamente y_2 cruza el eje x, es decir, que hay un $\bar{x}$ tal que $y_2(\bar{x}) = 0$. Para ello razonaremos por contradicción suponiendo que en el intervalo $[a, b]$, $y_2(x) > 0$.

- Demuestre que el Wronskiano de y_1 e y_2 satisface $W(a) \leq 0$ y $W(b) \geq 0$

- Demuestre que el Wronskiano también satisface
$$\int_a^b W'(x)dx = \int_a^b (\alpha(x) - \beta(x))y_1(x)y_2(x)dx$$
y concluya.

- ¿Como sería la demostración anterior si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ fueran de soluciones linealmente independientes de una EDO de segundo orden?