Auxiliar 3

Ecuaciones Lineales de Segundo Orden

Profesor: Roberto Cortez
Auxiliar: Miguel Sepúlveda

P1.-

Resuelva las siguientes EDOs lineales homogéneas de segundo orden:

1. $y'' - 3y' + 4y = 0$
2. $4y'' - 12y' + 9y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
3. $y'' - 2ay' + a^2 = 0$

P2.-

La ecuación de calor describe la temperatura $u(x,t)$ de una barra a lo largo de un eje con la siguiente EDP:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ k > 0$$

Para resolver la EDP, se usa el método de separación de variables, que consiste en buscar una solución de la forma $u(x,t) = T(t)X(x)$. Notar que T y X son funciones de una sola variable. Tras reemplazar esto en la EDP se obtiene:

$$T'X - kTX'' = 0 \Rightarrow \frac{T'}{T} = k\frac{X''}{X} = -\lambda$$

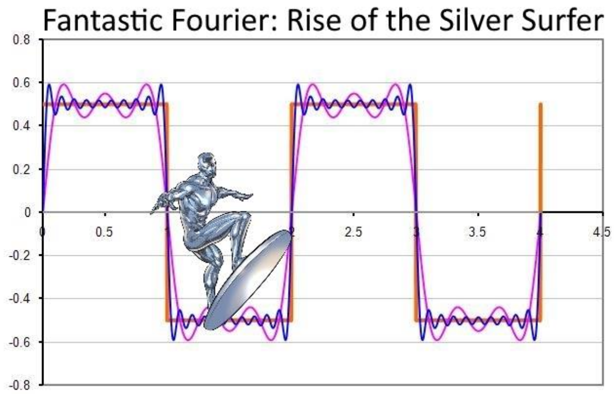
Para alguna constante λ, pues el lado izquierdo depende solo de t, el derecho solo de x, y la igualdad debe ser verdad para todo t y x. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} kX'' + \lambda X &= 0 \\ T' + \lambda T &= 0 \end{aligned}$$

1. Encuentre las posibles soluciones de las dos EDO, para distintos casos de λ.
2. Considere ahora el mismo para de ecuaciones, pero con las siguientes condiciones de borde:

   $$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

   donde la barra es de largo 1 y estas condiciones representan la situación física donde ambos extremos de la barra están a la misma temperatura. Encuentre los valores de λ para los que hay soluciones no-nulas para u, e interprete este resultado.



P3.-

Resuelva las siguientes EDOs lineales no homogéneas de segundo orden:

1. $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$
2. $y'' + 5y' + 6y = 4\sin x$

P4.-

Nuestro propósito es resolver la ecuación de Cauchy-Euler de segundo orden para y(x), dada por $x^2y'' + axy' + by = 0$, $x > 0$, y $a, b \in \mathcal{R}$. Para esto siga los siguientes pasos:

1. Considerando el cambio de variable $z(t) = y(e^t)$, demuestre que la ecuación se reduce a:

$$z''(t) + (a-1)z'(t) + bz(t) = 0$$

2. Encuentre la solución general de la EDO homogénea a coeficientes constantes de la parte anterior para $a = 2$ y $b = 1$, y recupere la solución de la EDO original.