P1 Hacemos el cambio $y = u - \alpha$
$x = v - \beta$

$$y' = u' = F\left(\frac{a(v-\beta) + b(u-\alpha) + c}{d(v-\beta) + e(u-\alpha) + f}\right)$$

$$= F\left(\frac{av + bu - a\beta - b\alpha + c}{dv + eu - d\beta - e\alpha + f}\right)$$

queremos que $a\beta + b\alpha = c$ y $d\beta + e\alpha = f$, pues al eliminar las constantes podemos multiplicar y dividir por $\frac{1}{v}$ y tendremos una homogenea!

$$\begin{aligned} a\beta + b\alpha &= c \\ d\beta + e\alpha &= f \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} b & a \\ e & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

Regla de Cramer $\rightarrow$ $\alpha = \dfrac{\begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix}}{-ae + bd}$, $\beta = \dfrac{\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}{-ae + bd}$

con este α y β, la edo queda

$$u' = F\left(\frac{av + bu}{dv + eu}\right) = F\left(\frac{a + b\frac{u}{v}}{d + e\frac{u}{v}}\right) = F\left(G\left(\frac{u}{v}\right)\right) //$$

$$y' = \frac{2y + x - 1}{y + 2x + 1} \qquad \begin{array}{l} y \to u - \alpha \\ x \to v - \beta \end{array}$$

$$u' = \frac{v + 2u - \beta - 2\alpha - 1}{2v + u - \alpha - 2\beta + 1}$$

$$\to \begin{array}{l} +2\alpha + \beta = -1 \\ \alpha + 2\beta = 1 \end{array} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \alpha = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{4 - 1} = -1 \quad , \beta = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{4 - 1} = +1$$

$$u' = \frac{v + 2u}{2v + u} = \frac{1 + 2\frac{u}{v}}{2 + \frac{u}{v}} \quad , z = \frac{u}{v} , z' = \frac{1}{v} u' - \frac{u}{v^2}$$

$$\to u' = v z' + z$$

$$\to v z' + z = \frac{1 + 2z}{2 + z} \to v z' = \frac{1 + \cancel{2z} - \cancel{2z} - z^2}{2 + z} = \frac{1 - z^2}{2 + z}$$

$$\to z' \left(\frac{2 + z}{1 - z^2} \right) = \frac{1}{v} \to z' \frac{2 + z}{(1 - z)(1 + z)} = \frac{1}{v}$$

frac. parciales: $\frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z} = \frac{2+z}{1-z^2}$

$\to A + AZ + B - BZ = 2 + Z$

$$\to \begin{matrix} A - B = 1 \\ A + B = 2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} A = 3/2 \\ B = 1/2 \end{matrix}$$

$$\therefore Z'\left(\frac{3/2}{1-Z} + \frac{1/2}{1+Z}\right) = \frac{1}{V} \Big/ \int dV \to \int\left(\frac{3/2}{1-Z} + \frac{1/2}{1+Z}\right) dZ = \ln(V) + C$$

$$\to \frac{3}{2}\ln(1-Z) + \frac{1}{2}\ln(1+Z) = \ln(V) + C$$

$$\to \boxed{\frac{(1-Z)^{3/2}}{(1+Z)^{1/2}} = KV}$$

Si $bd - ae = 0$, entonces una fila es una c. l. de la otra: $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} e \\ d \end{bmatrix}$

$$\to \frac{ax + by + c}{dx + ey + F} = \frac{K(dx + ey + c/K)}{dx + ey + F}$$

Cambio $V(x) = cx + d\,y(x) + F \to V'(x) = c + d\,y'(x)$

$$\to \frac{V' - c}{d} = y' \to \frac{V' - c}{d} = F\left(\frac{K(V + c/K - F)}{V}\right) = H(V)$$

$$\to \boxed{V' = d\,H(V) + C}$$

2) $y' = \sqrt{1-y^2} \rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx \quad \Bigg| \begin{array}{l} y = \operatorname{sen} u \\ dy = \cos u \, du \end{array}$

$$\rightarrow \int \frac{\cos u \, du}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}} = u = x + C \qquad \int \frac{\cos u}{|\cos u|} du =$$

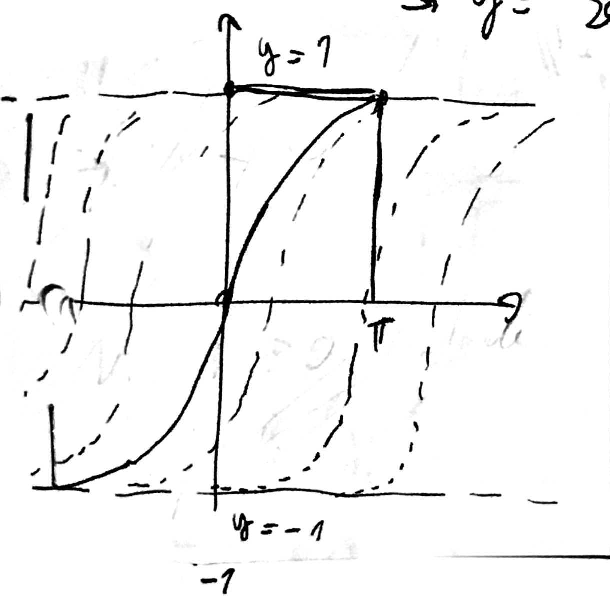
(Ver sgte Hoja)

$$\rightarrow \operatorname{sen}^{-1}(y) = x + C$$

$$\rightarrow y = \operatorname{sen}(x + C)$$

$$y(\pi) = 1 \rightarrow 1 = \operatorname{sen}(\pi + c) \rightarrow c = -\pi/2$$

$$\rightarrow y = \operatorname{sen}(x - \pi/2)$$



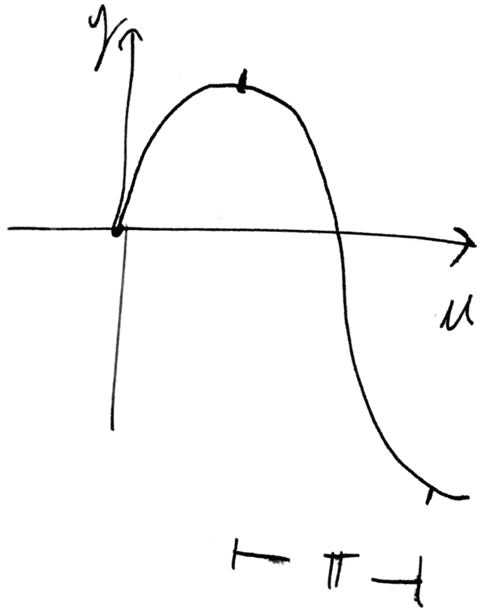
- Con $y(x) = 1$, la EDO ⊖ $0 = \sqrt{1-1} = 0$, por lo que es una solución
- tenemos dos posibles soluciones!

No contradice el teorema de Existencia y Unicidad por que $\sqrt{1-y^2}$ no es globalmente Lipschitz en y.

$\int \frac{\cos u}{|\cos u|} du$?

* el signo de $\cos u$ depende del valor de u

- recordar que al hacer cambio de variable, la función debe ser biyectiva ($u = \operatorname{Sen}^{-1} y$)
- esto, para Sen^{-1}, se hace restringiendo el dominio a un dominio de ancho π
- 2 opciones ($\pi/2$ debe estar en el dominio pues es el límite inferior)



1] $u \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\to \int \frac{\cos u}{\cos u} du = u \quad = \operatorname{Sen}^{-1}(y)$$

2] $u \in [\pi/2, 3\pi/2]$

$$\to \int \frac{\cos u}{|\cos u|} du = -u \quad = x + C$$

$$\to \operatorname{Sen}^{-1}(y) = -x + C \to y = \operatorname{Sen}(-x+C) = -\operatorname{Sen}(x+C)$$

$$y(\ ) = 1 \to 1 = -\operatorname{Sen}(\pi + C) \to \pi + C = 3\pi/2 \to C = \frac{\pi}{2}$$

$$\to y = -\operatorname{Sen}(x + \pi/2) = \operatorname{Sen}(x - \pi/2) \text{ (verificar)}$$

dem: Podemos hacerlo de dos maneras:

1] Por definición: Supongamos que la función es globalmente lipschitz:

~~$\forall x \in [0,T], \forall \in [-1,1], \|$~~

$$\exists K \ \forall y_1, y_2 \in [-1,1] \ \left\|\sqrt{1-y_1^2} - \sqrt{1-y_2^2}\right\| \leq K\|y_1 - y_2\|$$

$$\rightarrow \frac{\|1-y_1^2 - 1 - y_2^2\|}{\left\|\sqrt{1-y_1^2} + \sqrt{1-y_2^2}\right\|} \leq K\|y_1 - y_2\|$$

$$\rightarrow \frac{\|y_1 - y_2\|\|y_1 + y_2\|}{\left\|\sqrt{1-y_2^2} + \sqrt{1-y_1^2}\right\|} \leq K\|y_1 - y_2\|$$

$$\rightarrow \frac{\|y_1 + y_2\|}{\left\|\sqrt{1-y_1^2} + \sqrt{1-y_2^2}\right\|} \leq K,$$ esto no puede ser!

• no puede ser pues al acercar y_1 e y_2 el denominador crece sin límites, por lo que dicho K no puede existir ■

2] • La condición de lipshitz está estrechamente relacionada con la derivada de la función. Si f es diferenciable:

f lipschitz $\longleftrightarrow$ f tiene derivada acotada

dem

$\rightarrow$] f lipschitz $\rightarrow \exists M, \forall x, h \in dom(f), |f(x+h) - f(x)| \leq M|h|$

$$\rightarrow \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq M \xrightarrow[\lim_{h \to x}]{} |f'(x)| \leq M, \forall x$$

$\boxed{\leftarrow}$ f diferenciable con derivada acotada por K

$\xrightarrow[\text{TVM}]{}$ $\forall x_1, x_2 \in dom(f), \exists c \in [x_1, x_2]$

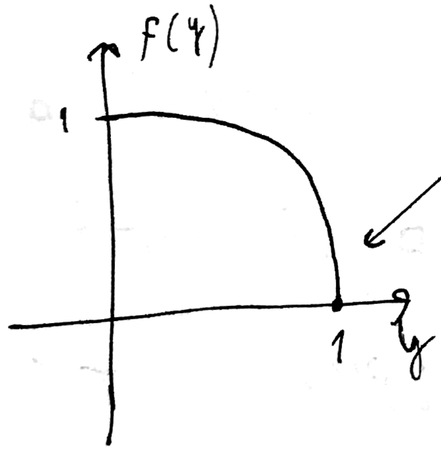
$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| f'(c) \leq K |x_1 - x_2|$

$\therefore$ f lipschitz $\blacksquare$

Usemos esto para ~~dem~~ demostrar que $f(y) = \sqrt{1-y^2}$ no es lipschitz: Veamos que no tiene derivada ~~continua~~.

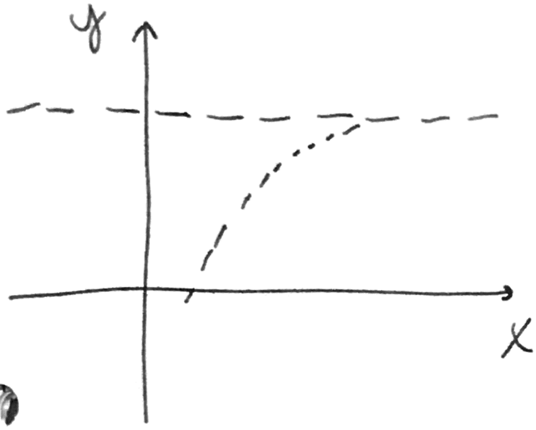
$$f'(y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot -2y = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

Con $y \to 1$, $f'(y)$ se dispara, por lo que no puede ser lipschitz



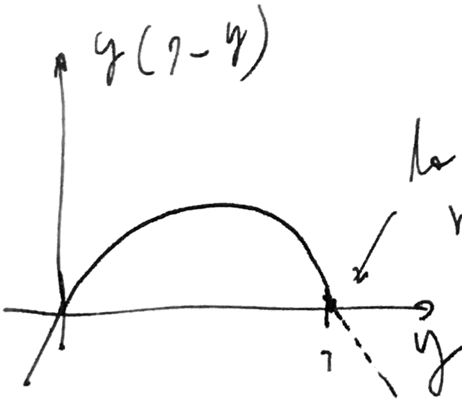
f(y) se acerca rapidamente a y

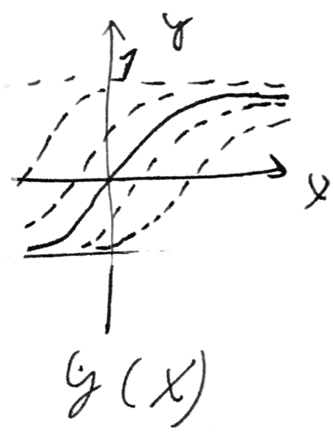
de hecho, $f(y) = y'$ se acerca tan rapidamente al 0 cuando $y \to 1$, que la función $y(x)$ no alcanza a "frenar" cuando se aproxima a $y = 1$, por lo que alcanza $y = 1$ en un tiempo finito.



- Un ejemplo de una función lipschitz donde $y(x)$ "alcanza a frenar" sería $y' = y(1-y)$

[modelo logístico]





$$f(y) = y(1-y)$$

Concluimos que el TEU no se contradice pues $\sqrt{1-y^2}$ ~~no~~ no es lipschitz

• Con $y(0) = 1$, tenemos que $y(0) = 1 = \text{Sen}(0 + c) \rightarrow$

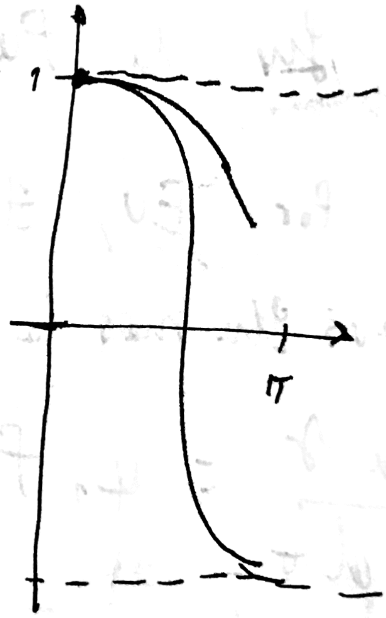
$\rightarrow c = \pi/2 \rightarrow y(t) = \text{Sen}(x + \pi/2) = \text{Cos}(x)$

¿Que ocurre?

$x > 0$

$$(\text{Cos}(x))' = -\text{Sen}(x) \neq \sqrt{1 - \text{Cos}^2 x} = |\text{Sen}(x)| = \text{Sen}\, x$$

NO es solución! La pendiente debe ser positiva, ~~negativa~~, pero para $\text{Cos}(x)$, la derivada es negativa. La única solución que funciona es $y(x) = 1$.



$\boxed{P3}$ • Para que exista una única solución global, según TEU, el RHS debe ser continua en t y lipschitz en y

• es continua en t por continuidad de $f(t)$

• Sea $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$|RHS(y_2) - RHS(y_1)| = |a_1 f(1 - y_1) - a_2 y_1 - (a_1 f(1 - y_2) - a_2 y_2)| = |a_1 f(y_2 - y_1) + a_2(y_2 - y_1)|$$

$= |a_1 f(t) + a_2| \, |y_2 - y_1|$

$\leq (|a_1 f| + |a_2|) \, |y_2 - y_1|$

$\leq (|a_1| M + |a_2|) \, |y_2 - y_1| \quad (|f(t)| \leq M, \ \forall t \geq 0)$

$\equiv K \, |y_2 - y_1|$. Con este K, se tiene

que la función es lipschitz.

Por TEU, $\exists!$ solución

Busquemos la solución:

$$\frac{dy}{dt} = a_1 f(t)(1-y) - a_2 y$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dt} + (a_1 f(t) + a_2)\, y = a_1 f(t) \Big/ \cdot \mu$$

$$\Big/ \cdot e^{\int (a_1 f(t) + a_2)\,dt} = e^{a_1 \int_0^t f\,dt + a_2 t} = e^{a_1 F(t) + a_2 t}$$

$$\rightarrow \left(y\, e^{a_1 F(t) + a_2 t}\right)' = a_1 f(t)\, e^{a_1 F(t) + a_2 t}$$

$$\Big/ \cdot \int dt \rightarrow y\, e^{a_1 F(t) + a_2 t} \Big|_{y_0}^{y(t)} = a_1 \int_0^t f(t)\, e^{a_1 F(t) + a_2 t}\, dt$$

$$\to y(t)\, e^{\overbrace{a_1 F(t) + a_2 t}^{r}} - y_0\, e^{\overbrace{a_1 F(0) + a_2 \cdot 0}^{0}} = a_1 \int_0^t f e^{a_1 F + a_2 t}$$

$$\to y(t) = \underbrace{y_0\, e^{-r}}_{\geq 0} + e^{-r} a_1 \underbrace{\int_0^t f(t) e^{r(t)}\, dt}_{\geq 0}$$

b) notar que $\dfrac{dr(t)}{dt} = a_1 f(t) + a_2$

$$\to a_1 \int_0^t f(t) e^{r(t)}\, dt = \int_0^t (a_1 f(t) + a_2) e^{r(t)}\, dt$$

$$- \int_0^t a_2 e^{r(t)}\, dt = \int_{r(0)=0}^{r(t)} e^{r}\, dr - \int_0^t a_2 e^{r(t)}\, dt$$

$$= e^{r} - 1 - \int_0^t a_2 e^{r(t)}\, dt$$

$$\therefore y(t) = y_0 e^{-r} + e^{-r}\Big(e^{r} - 1 - \overbrace{\int_0^t a_2 e^{r(t)}\, dt}^{\geq 0}\Big)$$

$$\leq y_0 e^{-r} + e^{-r}(e^{r} - 1) \quad //$$

c) $y(t) \leq y_0 e^{-r} + 1 - e^{-r} = 1 - e^{-r}(1 - y_0)$

$\in [0,1]$

$\to 1 - y_0 \in [0,1] \to y(t) \leq 1$

come per b) $y(t) \geq 0, \quad y \in [0,1]$

P3

$$r\rho'' + 2\rho' + \alpha^2 r\rho = 0, \quad \alpha^2 = \frac{2\pi G}{K}$$

$$(r\rho)'' = r\rho'' + 2\rho'$$

$$\rightarrow (r\rho)'' + \alpha^2 r\rho = 0$$

$$\rightarrow (r\rho)'' = -\alpha^2 r\rho$$

$$r\rho = A\cos(\alpha r + B)$$

en $r=0$, $0 = A\cos(0+B) \rightarrow B = \pi/2$

$$\rightarrow r\rho = A\cos(\alpha r + \pi/2) = A\,\mathrm{Sen}(\alpha r)$$

$$\rightarrow \rho(r) = \frac{A\,\mathrm{Sen}(\alpha r)}{r}$$

$$\lim_{r\to 0} \rho(r) = \rho(0) = \lim_{r\to 0} A\frac{\mathrm{Sen}(\alpha r)}{\alpha r} = A\alpha \rightarrow A = \frac{\rho(0)}{\alpha}$$

$$\therefore \rho(r) = \cancel{\alpha}\rho(0)\frac{\mathrm{Sen}(\alpha r)}{\alpha r}$$

en $r = \frac{\pi}{\alpha}$, $\rho(r) = \frac{\rho(0)\,\mathrm{Sen}\,\pi}{\alpha\,\pi/\alpha} = \frac{\rho(0)}{\pi}\cdot 0 = 0$ No modelo.