Auxilar 2

Problema de Cauchy, Existencia y Unicidad

Profesor: Roberto Cortez
Auxiliar: Miguel Sepúlveda

No - Resumen

TEU Global: Sea I un intervalo. Supongamos que f es una función continua con respecto a su primera variable y globalmente Lipschitz con respecto a su segunda variable. Entonces para cada x_0 e y_0 existe una única solución global $y \in C^1(I)$ del problema de Cauchy.

TEU Local: Sea I un intervalo. Tomemos $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbf{R}$. Supongamos que f es una función continua con respecto a su primera variable en x_0 y f es localmente Lipschitz en torno a y_0 en algún vecindario de x_0. Entonces existe un vecindario J de x_0 deonde existe una única solución local $y \in C^1(J)$ del problema de Cauchy.

P1.-

Resuelva las siguientes ecuaciones:

- $xy'' + y' = 0$
- $y' = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x$ **Hint:** Considere una solución de tipo $ax + b$

P2.-

Una ecuación diferencial se dice de tipo homogénea (no confundir con EDO homogénea) cuando es de la forma

$$y' = F\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

Donde F es una función continua y conocida. Este tipo de problemas se resuelve con el cambio de variables $z = \frac{y}{x}$. El propósito de este problema es resolver una ecuación de la forma:

$$y' = F\Big(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\Big),\ \ a,b,c,d,e,f \in \mathbf{R}$$

- Pruebe que si $ae - bd \neq 0$ la ecuación se puede llevar a la forma. Para esto, realice el cambio de variable $u = y + \alpha$ y $v = x + \beta$, con α y β constantes adecuadamente elegidas.
- Aplique el método a la ecuación

$$y' = \frac{2y + x - 1}{y + 2x + 1}$$

- Encuentre un método de resolución si si $ae - bd = 0$

P3.-

- Encuentre una solución no constante en el intervalo $[0, \pi]$ del problema con condición inicial $y' = \sqrt{1 - y^2} = 0$, $y(\pi) = 1$. Verifique que $y(x) = 1$ también es solución del problema. Demuestre que si una función f es diferenciable, entonces

$$f \text{ es Lipschitz} \longleftrightarrow f' \text{ es acotada} \tag{1}$$

- ¿Contradice la existencia de dos soluciones del problema de Cauchy anterior?
- ¿Qué ocurre cuando la condición inicial es $y(0) = 1$?

P4.-

Consideremos a_1, a_2 y $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua, positiva y acotada. Consideremos el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = a_1 f(t)(1 - y(t)) - a_2 y(t), \ t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \in [0, 1] \end{cases}$$

El objetivo de esta pregunta es probar que con las hipótesis dadas la solución de este problema existe, es única y permanece acotada entre 0 y 1 para todo $t \geq 0$. Para ello proceda de la siguiente forma:

- Pruebe que existe una única solución global para este problema y encuéntrela. Puede serle util considerar

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt$$

  Concluya que $\forall t \geq 0$, $y(t) \geq 0$

- A partir de la expresión encontrada para y en la parte enterior pruebe que

$$y(t) \leq y(0) e^{-[a_1 F(t) + a_2 t]} + e^{-[a_1 F(t) + a_2 t]} (e^{a_1 F(t)} e^{a_2 t} - 1)$$

- Concluya que $\forall t \geq 0$, $y(t) \in [0, 1]$

P5.-

Una estrella esferoidal de radio $a > 0$ está compuesta de un fluido compresible cuya densidad $\rho(r)$ es funcion del radio r. Es posible verificar que la densidad cumple la siguiente ecuación diferencial:

$$r\rho'' + 2\rho' + \alpha^2 r \rho = 0, \quad \alpha^2 = \frac{2\pi G}{k}$$

- Determine $\rho(r)$ en términos de $\rho(0)$, la densidad del núcleo estelar. **Hint:** Resuelva para $(r\rho)''$. Note que $\rho(r)$ debe ser positiva y finita si $r \to 0$
- Explique por qué este modelo predice estrellas de tamaño máximo $a = \dfrac{\pi}{\alpha}$