P1) • $y' = \cos(5x)$. EDO lineal no homogenea

EDOs como esta se resuelven con integración directa. Casi todas las EDOs vistas pueden ser reducidas a este caso, o a separación de variables.

• $/\int dx \rightarrow \int \frac{dy}{dx} dx = \int \cos(5x)\, dx$ cambio de var $/ y = y(x)$

$\rightarrow dy = \frac{dy}{dx} dx$

$$\rightarrow \int dy = \frac{\operatorname{Sen}(5x)}{5} + C$$

• $$\rightarrow y = \frac{\operatorname{Sen}(5x)}{5} + C$$

• $y' + y\, tg(x) = 0$. EDO lineal homogenea a coef. variables.

Usemos factor integrante.

$a(x) y' + b(x) y = Q(x) \xrightarrow[\text{Normalizar}]{} y' + \bar{a}(x) y = \bar{Q}(x)$

$\xrightarrow[\text{Calculos}]{} \cdot e^{\int \bar{a}(x)\,dx} \rightarrow y' e^{\int \bar{a} dx} + \bar{a} e^{\int \bar{a}} y = \bar{Q} e^{\int \bar{a}}$

$$\rightarrow \boxed{\left(y\, e^{\int \bar{a}}\right)' = \bar{a}\, e^{\int \bar{a}}}$$

Hagamos estos pasos para la EDO en cuestión

$$y' + y\, tg(x) = 0 \,/\cdot\, e^{\int tg(x)dx} = e^{-\ln|\cos x|}$$

$$= |\cos x|^{-1}$$

$$\rightarrow \left(y\, |\cos x|^{-1}\right)' = 0 \;/\int dx$$

$$\rightarrow y\, |\cos x|^{-1} = C \rightarrow y = C\,|\cos x| \;//$$

- $2y'(x) = 1 + y^2$, EDO no lineal

lo podemos resolver con sep. de variables, pues es del tipo $y' = f(y)\, g(x)$, con $f(y) = \frac{1+y^2}{2}$, $y(x) = 1$

$$/\cdot \frac{1}{1+y^2} \rightarrow 2\frac{y'}{1+y^2} = 1 \;/\int dx \rightarrow 2\int \frac{dy}{1+y^2} = x + C$$

$$\rightarrow \arctg(y) = \frac{x}{2} + C \rightarrow y = tg\left(\frac{x}{2} + C\right) \;//$$

• $y' - 2xy = 1$ EDO lineal no homogénea a coef. variables

$1 \cdot e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2} \rightarrow (y e^{-x^2})' = e^{-x^2} / \cdot \int dx$

$\rightarrow y e^{-x^2} = \int e^{-x^2} dx + C \rightarrow y = \dfrac{\int e^{-x^2} dx}{e^{-x^2}} + C e^{x^2}$ //

• $y'(a^2 + x^2) + xy = a^2$ Mismo tipo que la anterior

normalizamos $\rightarrow y' + \dfrac{x}{a^2+x^2} y = \dfrac{a^2}{a^2+x^2}$

$1 \cdot e^{\int \frac{x}{a^2+x^2} dx} = e^{\frac{\ln(a^2+x^2)}{2}} = \sqrt{a^2+x^2}$

$\rightarrow \left(y\sqrt{a^2+x^2}\right)' = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} / \int dx$

$y\sqrt{a^2+x^2} = a^2 \int \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx$ $\Bigg|$ $x = a \operatorname{senh} u$, $dx = a \cosh(u)\, du$

<u>Recordar:</u> $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

$$\rightarrow y\sqrt{a^2+x^2} = a^2\int \frac{a\cosh(u)\,du}{\sqrt{a^2(1+\operatorname{senh}^2(u))}} = a^2\int du$$

$$= a^2 u + C$$

$$= a^2 \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

HOCUS POCUS $$= a^2 \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right) + C$$

P2| Pregunta de modelamiento

$$\dot{x} = (1-x)\,x$$

tasa de crecimiento — factor de proporcionalidad (normalizado) — población actual

- Población estable $\rightarrow \dot{x}(x_{es}) = 0$

$$\rightarrow 0 = (1-x_{es})x_{es} - C \rightarrow x_{es}^2 - x_{es} + C = 0$$

$$\rightarrow x_{es}^{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4C}}{2}$$. Para que exista, $C \leq 1/4$

• Si $c > 1/4$, no existen los puntos de equilibrio los conejos mueren

• esta es una ecuación de Ricatti o de variables separables. Usemos el segundo método

•
$$\frac{\dot{x}}{(1-x)x-c} = 1 \rightarrow \frac{\dot{x}}{(x-x_{es}^{+})(x+x_{es}^{+})} = 1 \Big/ \int dt$$

$$\rightarrow \int \frac{dx}{(x-x_{es}^{+})(x-x_{es}^{-})} = t + C_1$$

$$\xrightarrow[\text{(Frac. parciales)}]{} \int \left(\frac{A}{(x-x_{es}^{+})} + \frac{B}{(x-x_{es}^{-})}\right) dx = t + C_1$$

$$Ax - Ax_{es}^{-} + Bx - Bx_{es}^{+} = 1$$

$$\rightarrow (A+B)x - Ax_{es}^{-} - Bx_{es}^{+} = 0$$

$$\rightarrow A + B = 0$$

$$-Ax_{es}^{-} - Bx_{es}^{+} = -Ax_{es}^{-} + Ax_{es}^{+} = A(x_{es}^{+} - x_{es}^{-}) = 1$$

$$\rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{1-4c}}, \quad B = -\frac{1}{\sqrt{1-4c}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-4c}} \int \left(\frac{1}{x - x_{es}^{+}} - \frac{1}{x - x_{es}^{-}} \right) dx = t + c_1$$

$$\rightarrow \ln(x - x_{es}^{+}) - \ln(x - x_{es}^{-}) = t\sqrt{1-4c} + c_1$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{x - x_{es}^{+}}{x - x_{es}^{-}} \right) = t\sqrt{1-4c} + c_1$$

$$\rightarrow \frac{x - x_{es}^{+}}{x - x_{es}^{-}} = K e^{t\sqrt{1-4c}} \quad , K \text{ cte}$$

$$\rightarrow x = \frac{x_{es}^{+} + x_{es}^{-} K e^{t\sqrt{1-4c}}}{1 - K e^{t\sqrt{1-4c}}}$$

$\boxed{P3}$ $y' = y^2 - 12y + 20$, Ricatti!

Para los de Ricatti, es siempre útil factorizar $y' = (y-2)(y-10)$. Con $y_p = 2$, tenemos una solución. hacemos el cambio $y = 2 + \frac{1}{z}$

$$\rightarrow y' = -\frac{z'}{z^2}$$

la EDO queda

$$-\frac{z'}{z^2} = \left(2+\frac{1}{z}-2\right)\left(2+\frac{1}{z}-10\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}-8\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} - \frac{8}{z} \quad / \cdot -z^2$$

$$\rightarrow z' = -1 + 8z \quad / \cdot e^{\int -8\,dx} = e^{-8x}$$

$$z' - 8z = -1$$

$$\rightarrow (z e^{-8x})' = -e^{-8x} \quad / \int dx$$

$$\rightarrow z e^{-8x} = \frac{e^{-8x}}{8} + C$$

$$\rightarrow z = \frac{1}{8} + Ce^{8x}, \quad z = \frac{1}{y-2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{y-2} = \frac{1}{8} + Ce^{8x} \rightarrow \boxed{y = \frac{8}{1+Ce^{8x}} + 2}$$

- $y' = y^2 - 2xy + x^2 - 3$, no se puede hacer con variables separables, pero es de Riccati

Factorizamos: $y' = (y-x)^2 - 3$

la x nos molesta al tratar soluciones del tipo $y = k$. tratemos una $y = x + k$ para deshacernos de x

$$(x+k)' = 1 = (x+k-x)^2 - 3 = k^2 - 3$$

$\to k^2 = 4 \to k = \pm 2$, cual fuiera sirve

$$y_p = x+2 \to y = x+2+\frac{1}{z} \to y' = 1 + \frac{(-z')}{z^2}$$

$$\to 1 + \frac{(-z')}{z^2} = \left(x+2+\frac{1}{z} - x\right)^2 - 3$$

$$= \left(2 + \frac{1}{z}\right)^2 - 3 = 4 + \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} - 3$$

$$\to \frac{-z'}{z^2} = \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2}$$

$$\to z' = -4z - 1 \to z' + 4z = -1$$

$$/\cdot e^{\int 4dx} \to (z e^{4x})' = -e^{4x} \Big/ \int dx$$

$$\to z e^{4x} = -\frac{1}{4} e^{4x} + C \to z = -\frac{1}{4} + Ce^{-4x}$$

Cambiamos de vuelta: $z = \frac{1}{y-(x+2)}$

$$\to \frac{1}{y-(x+2)} = \frac{Ce^{-1x}-1}{4} \to y = \frac{4}{(Ce^{-1x}-1)(x+2)}$$

- $xy' - y = xy^6$. Es de Bernoulli, son de tipo $y' + P(x)y = f(x)y^n$. Se hace el cambio $z = y^{1-n}$, y se multiplica por $(1-n)y^{-n}$. Normalizamos

$$y' - \frac{1}{x}y = y^6 \quad \left| \begin{array}{l} z = y^{1-n} = y^{-5} \\ z' = -5y^{-6}y' \end{array} \right|$$

$$/\cdot -5y^6 \to \underbrace{-5y^{-6}y'}_{z'} + \frac{5\overbrace{y^{-6}y}^{z}}{x} = -5$$

$$\to z' + \frac{5}{x}z = -5 \;/\cdot e^{\int \frac{5}{x}dx} = x^5$$

$$(zx^5)' = -5x^5 \;//\int \to zx^5 = -\frac{5x^5}{6} + C$$

$$\to z = Cx^{-5} - \frac{5}{6}x$$, hacemos el cambio de vuelta

$z = y^{-5} \rightarrow y^{-5} = Cx^{-5} - \frac{5}{6}x \;/\; \wedge -\frac{1}{5}$

$$\rightarrow y = \left(Cx^{-5} - \frac{5x}{6}\right)^{-1/5}$$

- $y'' + 4y = 0$. es una EDO sin variable independiente. el plan es tratar y como la independiente e y' como dependiente, y le llamamos $p(y)$. $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot p$

$\rightarrow p\frac{dp}{dy} + 4y = 0 \rightarrow p\frac{dp}{dy} = -4y \;/\int dy$

$\rightarrow \int p\,dp = -4\int y\,dy \rightarrow \frac{p^2}{2} = -\frac{4y^2}{2} + C$

$\rightarrow p^2 = -4y^2 + C. \rightarrow y'^2 = C - 4y^2 \rightarrow C \geq 0,$

lo escribimos como $C = 4a^2$ para el sgte paso

$\rightarrow y'^2 = 4a^2 - 4y^2 = 4(a^2 - y^2) \rightarrow y' = \pm 2\sqrt{a^2 - y^2}$

$\rightarrow \pm \frac{y'}{\sqrt{a^2 - y^2}} = 1 \;/\int dx \rightarrow \pm\int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = x + K$

$y = a \operatorname{sen} \theta$

$dy = a \cos\theta \, d\theta$ $\rightarrow \pm \int \frac{a \cos\theta \, d\theta}{a \cos\theta} = x + k$

$\rightarrow \pm \theta = x + k \rightarrow \pm \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{y}{a}\right) = x + k$

$\rightarrow \frac{y}{a} = \operatorname{sen}(\pm(x+k)) \rightarrow y = \pm a \operatorname{sen}(x+k)$

$= A \operatorname{sen}(x+k)$ //

- $x y'' + y' = 0$, EDO sin variable indep.

$\rightarrow y'' + \frac{1}{x} y' = 0$, $z = y'$, $z' = y''$, tratamos y' como la indep.

$\rightarrow z' + \frac{1}{x} z = 0 \; / \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$

$\rightarrow (zx)' = 0 \; / \int dx \rightarrow zx = c$

$\rightarrow z = c/x$

$\rightarrow y' = \frac{c}{x} \rightarrow y = c \ln x + D$ //

P9| Hacemos el cambio $y = u - \alpha$
$x = v - \beta$

$$y' = u' = F\left(\frac{a(v-\beta) + b(u-\alpha) + c}{d(v-\beta) + e(u-\alpha) + f}\right)$$

$$= F\left(\frac{av + bu - a\beta - b\alpha + c}{dv + eu - d\beta - e\alpha + f}\right)$$

queremos que $a\beta + b\alpha = c$ y $d\beta + e\alpha = f$, pues al eliminar las constantes podemos multiplicar y dividir por $\frac{1}{v}$ y tendremos una homogenea!

$$\begin{matrix} a\beta + b\alpha = c \\ d\beta + e\alpha = f \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} b & a \\ e & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

Regla de Cramer $\rightarrow$ $\alpha = \dfrac{\begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix}}{-ae + bd}$, $\beta = \dfrac{\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}{-ae + bd}$

Con este α y β, la ecuación queda

$$u' = F\left(\frac{av + bu}{dv + eu}\right) = F\left(\frac{a + b\frac{u}{v}}{d + e\frac{u}{v}}\right) = F\left(G\left(\frac{u}{v}\right)\right) //$$

$$y' = \frac{2y + x - 1}{y + 2x + 1} \qquad \begin{array}{l} y \to u - \alpha \\ x \to v - \beta \end{array}$$

$$u' = \frac{v + 2u - \beta - 2\alpha - 1}{2v + u - \alpha - 2\beta + 1}$$

$$\to \begin{array}{l} +2\alpha + \beta = -1 \\ \alpha + 2\beta = 1 \end{array} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \alpha = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{4 - 1} = -1 \quad , \beta = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{4 - 1} = +1$$

$$u' = \frac{v + 2u}{2v + u} = \frac{1 + 2\frac{u}{v}}{2 + \frac{u}{v}} \quad , z = \frac{u}{v} \, , z' = \frac{1}{v} u' - \frac{u}{v^2}$$

$$\to u' = v z' + z$$

$$\to v z' + z = \frac{1 + 2z}{2 + z} \to v z' = \frac{1 + \cancel{2z} - \cancel{2z} - z^2}{2 + z} = \frac{1 - z^2}{2 + z}$$

$$\to z' \left(\frac{2 + z}{1 - z^2} \right) = \frac{1}{v} \to z' \frac{2 + z}{(1 - z)(1 + z)} = \frac{1}{v}$$

frac. parciales: $\frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z} = \frac{2+z}{1-z^2}$

$\rightarrow A + Az + B - Bz = 2 + z$

$\rightarrow \begin{array}{l} A - B = 1 \\ A + B = 2 \end{array} \rightarrow \underline{\begin{array}{l} A = 3/2 \\ B = 1/2 \end{array}}$

$\therefore z\left(\frac{3/2}{1-z} + \frac{1/2}{1+z}\right) = \frac{1}{V} \quad // \int dV \rightarrow \int\left(\frac{3/2}{1-z} + \frac{1/2}{1+z}\right)dz = \ln(V) + C$

$\rightarrow \frac{3}{2}\ln(1-z) + \frac{1}{2}\ln(1+z) = \ln(V) + C$

$\rightarrow \boxed{\frac{(1-z)^{3/2}}{(1+z)^{1/2}} = KV}$