MA2001-1. Cálculo Avanzado y Aplicaciones 2018.
Profesor: Gonzalo Flores
Auxiliar: José M. Palacios
Fecha: 16 de abril de 2018

Auxiliar 5

Resumen

Teo 1 (Gauss). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F}: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ sobre un abierto $\mathcal{U}$ tal que $\Omega \cup \partial\Omega = \overline{\Omega} \subseteq \mathcal{U}$, entonces*

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F}\, dV.$$

Teo 2 (Stokes). *Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y regular por pedazos, cuyo borde $\partial\mathcal{S}$ es una curva cerrada, simple y regular por pedazos. Sea $\vec{F}: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido sobre un aberto $\mathcal{U}$ que incluye la superficie $\mathcal{S}$ y su borde $\partial\mathcal{S}$. Sea finalmente $\hat{n}: \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales que define una orientación sobre $\mathcal{S}$ y supongamos que la curva cerrada $\partial\mathcal{S}$ es recorrida con orientación positiva con respecto a la elección de la normal $\hat{n}$, es decir, respetando la regla de la mano derecha. Entonces*

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA.$$

Teo 3 (Green). *Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ una región acotada tal que su frontera $\partial\mathcal{S}$ es una curva simple, cerrada y regular por pedazos, orientada en el sentido anti-horario. Consideremos dos campos escalares $M = M(x,y)$ y $N = N(x,y)$, ambos de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto que contiene tanto a $\mathcal{S}$ como a $\partial\mathcal{S}$. Entonces*

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} M dx + N dy = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy.$$

Variable Compleja

En todo lo que sigue $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es una función definida sobre un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

Def 1. *Diremos que $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es continua en $z_0 \in \Omega$ si para toda sucesión $(z_n)_{n\geq 1} \subseteq \Omega$ tal que $z_n \to z_0$ se tiene que $f(z_n) \to f(z_0)$, lo que se escribe de forma compacta de las siguientes formas equivalentes:*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \iff \lim_{z\to z_0} |f(z) - f(z_0)| = 0.$$

Obs 1. *Si escribimos:*

$$f(z) = u(z) + iv(z) \quad \text{o bien} \quad f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y),$$

entonces $f(z)$ es continua en $z_0 = x_0 + iy_0$ si y sólo si $u(x,y)$, $v(x,y): \Omega \to \mathbb{R}$ son continuas en (x_0, y_0).

Def 2. *Sea $\Omega \subseteq$ un conjunto abierto y $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función a variable compleja.*

1. *Diremos que f es derivable en $z_0 \in \Omega$ si existe el límite:*

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

2. *Si f es derivable en todo $z_0 \in \Omega$ diremos que es **holomorfa** en Ω.*

Teo 4. *Una función de variable compleja $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable en $z_0 \in \Omega$ si y sólo si es* Fréchet-derivable *en (x_0, y_0) como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y además se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemman:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

En dicho caso,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Prop 1. *Las reglas usuales de derivación para la suma, producto, cuociente, ponderación por escalar y composición de funciones siguen siendo válidas para funciones a variable compleja.*

Prop 2. *Si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es derivable en z_0 y $g: D \to \mathbb{C}$ es derivable en $f(z_0) \in D$, entonces la composición $g \circ f$ es deriable en z_0 y se tiene que:*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'\big(f(z_0)\big) \cdot f'(z_0).$$

Prop 3. *Sea $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, con Ω un conjunto abierto y **conexo**. Si $f' \equiv 0$ en Ω, entonces f es constante en Ω.*

Gradiente en coordenadas curvilineas

1. Coordenadas cilíndricas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}.$$

2. Coordenadas esféricas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

Divergencia en coordenadas curvilineas

1. Coordenadas cilíndricas:

$$\mathrm{div}\, \vec{F} = \frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial}{\partial \rho}(F_\rho \rho) + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}(F_z \rho)\Big).$$

2. Coordenadas esféricas:

$$\mathrm{div}\, \vec{F} = \frac{1}{r^2\sin\varphi}\left(\frac{\partial(F_r r^2 \sin\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial(F_\theta r)}{\partial \theta} + \frac{\partial(F_\varphi r \sin\varphi)}{\partial \varphi}\right)$$

Problemas

P1 Considere $f \in H(\Omega)$, donde $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es un conjunto abierto y conexo. Demuestre que para cada uno de los siguientes casos, la función f es **constante** en Ω:

1. $\operatorname{Re} f$ es constante.
2. Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que $f(z) \in \mathbb{R}$, es decir, f es una función a valores reales.
3. $|f(z)|$ es constante.

P2
1. Decimos que un campo escalar $v(x,y)$ es una *armónica conjugada* de $u(x,y)$ si la función $f(x+iy) := u(x,y) + iv(x,y)$ es derivable en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Considere entonces la función $u(x,y) := \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$. Encuentre una armónica conjugada de u.
2. Sea $f = u + iv$ una función derivable en un conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ abierto y conexo, donde u y v son funciones a valores reales. Suponga que existen constantes a, b, $c > 0$ tales que $au + bv = c$ para todo $z \in \mathcal{D}$. Pruebe que f es constante en $\mathcal{D}$.

P3 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto conexo. Suponiendo que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^2$ en Ω, que satisface $\Delta u = 0$ en Ω, pruebe que:

$$F(x,y) := \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y),\, -\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right),$$

es conservativo en Ω y concluya que existe $v : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa en Ω.

P4 Encuentre el dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ donde la función:

$$f(z) := \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right),$$

es holomorfa y demuestre que $\tan(f(z)) = z$, es decir, $f(z) = \arctan(z)$.

Propuestos

P1 Definamos los operadores diferenciales $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ mediante las fórmulas:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

1. Pruebe que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemman si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.
2. Muestre que si f es derivable en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, entonces $\forall z \in \Omega$, se tiene que $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$.
3. Explicite en términos de u y v a qué corresponde la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$.
4. Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase $\mathcal{C}^2$, se define el laplaciano de f mediante:

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v.$$

   Además, se dice que f es armónica en Ω si $\Delta f = 0$ en Ω. Deduzca entonces que si f es derivable en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, entonces f es armónica en Ω.

P2 Considere la función $u(x,y) = 1 + x + x^2 - y^2$. Encuentre una armónica conjugada de $u(x,y)$ en $\mathbb{C}$.

jpalaciosarmesto@gmail.com