MA2001-1. Cálculo Avanzado y Aplicaciones 2018.
Profesor: Gonzalo Flores
Auxiliar: José M. Palacios
Fecha: 19 de marzo de 2018

Auxiliar 1

Resumen

Def 1. *Un sistema de coordenadas curvilíneas es una transformación* ***invertible****, suficientemente diferenciable $r : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, de modo que a toda tripleta $(u, v, w) \in D$ le corresponde un único punto en el espacio*

$$\vec{r}(u, v, w) = \big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big).$$

Además, suponemos que la matriz jacobiana del sistema de coordenadas es una matriz ***invertible*** *para todo $(u, v, w) \in D$.*

Asociado al sistema de coordenadas curvilíneas, en cada punto se define un triedro de vectores unitarios $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ de la siguiente manera:

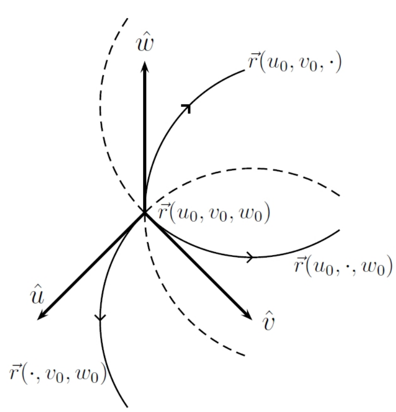
$$\hat{u} = \frac{1}{\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0, w_0)\|} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0, w_0).$$

De la misma forma se define $\hat{v}$ y $\hat{w}$.

Def 2. *Se dice que el sistema de coordenadas $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$ es ortogonal si los vectores unitarios del tiedro $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ definidos por*

$$\hat{u} := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Big/ \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right\|, \quad \hat{v} := \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Big/ \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right\|, \quad \hat{w} := \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \Big/ \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right\|.$$

son mutuamente ortogonales para cada $(u, v, w) \in D$



Def 3. *Dado un sistema de coordenadas ortogonales $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$, definimos los factores de escala como las siguientes cantidades:*

$$h_u = \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right\|, \quad h_v = \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right\|, \quad h_w = \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right\|.$$

Operadores Diferenciales en coordenadas ortogonales

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y un punto $(u, v, w) \in D$ tal que $\vec{r}(u, v, w) \in \Omega$. Como el triedro $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ es ortonormal y, en particular, una base de $\mathbb{R}^3$, podemos escribir:

$$\nabla f(\vec{r}) = \big(\nabla f(\vec{r}) \cdot \hat{u}\big)\, \hat{u} + \big(\nabla f(\vec{r}) \cdot \hat{v}\big)\, \hat{v} + \big(\nabla f(\vec{r}) \cdot \hat{w}\big)\, \hat{w}.$$

Luego, reemplazando la definición de los factores escalares y utilizando la regla de la cadena se concluye que:

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}.$$

Razonando similarmente, consideremos un campo vectorial $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 y denotemos por

$$F_u = F_u(u, v, w) := \vec{F}\big(\vec{r}(u, v, w)\big) \cdot \hat{u}(u, v, w).$$

Definiendo de la misma forma F_v y F_w, obtenemos que

$$\vec{F} = F_u\hat{u} + F_v\hat{v} + F_w\hat{w}.$$

Con esto, de manera análoga al caso anterior, es fácil mostrar que la divergencia en coordenadas ortogonales adquiere la forma:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right).$$

Por otro lado, repitiendo el análisis para el rotor obtenemos que:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}.$$

Problemas

P1 Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ campos escalares suaves. Pruebe las siguientes identidades:

$$(i) \quad \nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f, \qquad (ii) \quad \operatorname{div}(f\vec{F}) = \nabla f \cdot \vec{F} + f \operatorname{div} \vec{F}.$$
$$(iii) \quad \operatorname{rot}(f\vec{F}) = \nabla f \times \vec{F} + f \operatorname{rot} \vec{F}, \qquad (iv) \quad \Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\nabla f \cdot \nabla g.$$

P2 Un campo vectorial $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 se dice *central* si es radial y sólo depende de la distancia al origen, esto es, si el campo puede escribirse en coordenadas esféricas como $\vec{F}(\vec{r}) = \phi(r)\hat{r}$, para alguna función $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ de clase C^1.

1. Muestre que todo campo central $\vec{F}$ es *irrotacional*, es decir, $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$.
2. Verifique que si $\vec{F}(r) = \phi(r)\hat{r}$, entonces
$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\big(r^2 \phi(r)\big).$$
3. Concluya que todo campo solenoidal admite un potencial de la forma:
$$V(r) = \frac{K}{r} + C, \qquad K, C \in \mathbb{R}$$

P3 Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1.

1. Demuestre que
$$\operatorname{rot} \int_a^b \varphi(\vec{r}, t)dt = \int_a^b \operatorname{rot} \varphi(\vec{r}, t)dt.$$
Indicación: Puede serle útil recordar la regla de Leibnitz:
$$\frac{\partial}{\partial u} \int_a^b \varphi(\vec{r}, t)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u} \varphi(\vec{r}, t)dt,$$
donde $\vec{r} = (x, y, z)$ y u respresentan cualquier variable cartesiana.
2. Considere el campo vectorial $\vec{F}(\vec{r}) = g(r)\hat{\theta}$ expresado en coordenadas esféricas, donde $r = \|\vec{r}\|$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función escalar. Verifique que $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ y pruebe que
$$\operatorname{rot}\big(\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}\big) = 2t\vec{F}(t\vec{r}) + t^2 \frac{d}{dt}\vec{F}(t\vec{r}).$$
3. Sea ahora $\vec{F}$ un campo vectorial tal que $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ en una bola B de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen. Entonces, se puede probar que la identidad del punto anterior es válida en B (no lo haga). Considere ahora el campo vectorial
$$\vec{G}(\vec{r}) = \int_0^1 \vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}\, dt.$$
Usando lo anterior concluya que $\operatorname{rot} \vec{G} = \vec{F}$ en B.

P4 Considere las ecuaciones de Euler en régimen estacionario en presencia de un campo gravitacional:
$$\rho \nabla\vec{v} \cdot \vec{v} + \nabla p = -\rho g \hat{k}.$$

1. Demuestre la identidad vectorial
$$\nabla\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\nabla(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}).$$
2. Deduzca que para el caso de un flujo irrotacional e incompresible (ρ constante) se satisface la ecuación de Bernoulli:
$$\frac{\rho}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + p + \rho g z = \text{constante}.$$
3. Un estanque cilíndrico de radio R contiene agua hasta una altura h. En el fondo del estanque se practica una abertura de radio $\varepsilon \ll R$. Suponiendo que el flujo es irrotacional, estacionario e incompresible, demuestre que la rapidez con que sale el líquido es aproximadamente $\sqrt{2gh}$. Justifique brevemente las aproximaciones que haga.

P5 (**Propuesto**): Determine Δf en coordenadas esféricas.

jpalaciosarmesto@gmail.com