FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Control 3
Cálculo en Varias Variables 2018-1
Profesores: Matías Godoy, Nikolas Tapia, Victor Verdugo.
Auxiliares: Cristobal Valenzuela, Vicente Saavedra, Vicente Salinas.

P1. Usted se encuentra caminando por un parque cuando en la lejanía divisa al más tierno ejemplar de su animal favorito tomando una siesta. A un costado, observa que se extiende un bosque cuyo linde (o borde) traza una curva de ecuación $g(x, y) = 0$. En los árboles de este bosque crecen los más exóticos y variados frutos entre los cuales se encuentra el preferido del animal en cuestión; para sorprenderlo, usted decide ir hasta el bosque y coger uno de estos frutos para luego regalárselo. Pero, dado que podría depertar e irse en cualquier momento, usted decide que debe encontrar la forma más rápida de hacer el viaje primero **hasta el límite del bosque y luego hasta el animal**.

Suponga que el parque es completamente plano y que el tiempo que le tomará recoger el fruto es despreciable en comparación a lo que le tomará hacer el trayecto, es decir, usted puede tomar el alimento instantáneamente. Note además que sin pérdida de generalidad puede suponer que al momento de divisar al animal usted se encuentra en el origen y que éste tiene coordenadas (x_a, y_a).

(a) Escriba el problema de optimización con restricciones que debe resolver para encontrar la forma más rápida de hacer el recorrido.

(b) Suponga ahora que el borde del bosque es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$.

(i) Pruebe que los puntos críticos del problema se encuentran sobre la recta que pasa por el origen y el punto (x_a, y_a).

(ii) Usando la parte (i) determine los puntos críticos del problema. Evaluando la función objetivo en estos puntos, muestre que el óptimo tiene coordenadas

$$x^* = \frac{rx_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}, \quad y^* = \frac{ry_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}.$$

P2. Calcule el volumen de la región

$$S \coloneqq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + z^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$

P3. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, considere la integral

$$I_\lambda = \iiint_\Omega \frac{x^2y^2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^\lambda}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

donde $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ es la bola unitaria euclidiana en $\mathbb{R}^3$.

(a) Considere el cambio de variables a coordenadas esféricas $T : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi)$ dado por $T(r, \theta, \varphi) = (r \cos\theta \sin\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\varphi)$. Calcule la matriz Jacobiana $J_T(r, \theta, \varphi)$ y su determinante.

(b) Dado $0 < \varepsilon < 1$ considere el dominio $\Omega_\varepsilon \coloneqq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Evalúe la integral

$$I_\lambda(\varepsilon) \coloneqq \iiint_{\Omega_\varepsilon} \frac{x^2y^2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^\lambda}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Indicación: Podría serle útil la transformación del punto anterior.

(c) Pruebe que $I_\lambda(\varepsilon)$ converge cuando $\varepsilon \to 0$ si y solamente si $\lambda < \frac{9}{2}$. Calcule el valor del límite.