Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
21 de Agosto de 2018

Clase Auxiliar #14 : Integración

Profesor: Aris Daniilidis
Auxiliares: Matías Altamirano, Freddy Flores, Pablo López

P1. Calcule

$$I = \int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\, dx\, dy\, dz$$

Hint: Use dos veces el teorema de Fubini, cambiando el orden de integración adecuadamente.

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$. El objetivo de este problema es demostrar el teorema de Schwartz,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

usando para ello el Teorema de Fubini. Para ello, siga los pasos detallados a continuación:

(a) Defina la función

$$g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

Justifique la existencia de la integral de g sobre un rectángulo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \subseteq R^2$ arbitrario y calcúlela.

(b) Demuestre que una función continua es nula si y sólo si su integral sobre cualquier rectángulo es nula.

(c) Concluya el resultado pedido.

P3. Dado un conjunto simétrico $A \subseteq \mathbb{R}^3$ (vale decir, $x \in A \iff -x \in A$) y una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua e impar (esto es, $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}^3$), muestre que:

$$\iiint_A f(x)\, dx = 0$$

Hint: Estudie y use en forma adecuada la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(u) = -u$.

P4. Calcule el volumen del elipsoide dado por

$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

recurriendo para ello a un cambio de variables que le parezca conveniente.

Resumen

- **[Teorema de Fubini]**Sean $R_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $R_2 \subseteq \mathbb{R}^m$, $R = R_1 \times R_2 \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ y $f : R \to \mathbb{R}$, una función integrable, y tal que las funciones

$$x \in R_1 \mapsto \int_{R_2} f(x,y)\, dy, \quad y \in R_2 \mapsto \int_{R_1} f(x,y)\, dx$$

están bien definidas y son integrables. Entonces se tiene la validez de las igualdades:

$$\int_R f = \int_{R_1} \left(\int_{R_2} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{R_2} \left(\int_{R_1} f(x,y)\, dx \right) dy$$

- **[Teorema del Cambio de Variables]** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto y $T : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Sea $\mathcal{D}'$ una región abierta y acotada con $Adh(\mathcal{D}') \subset \Omega$, y supongamos que T es inyectiva en $\mathcal{D}'$, que la matriz $T'(u)$ es invertible para todo $u \in \mathcal{D}'$ y que $\mathcal{D} = T(\mathcal{D}')$ es un abierto. Sea $f :\to \mathbb{R}$ una función continua.
Se tiene entonces la validez de la igualdad:

$$\int_{\mathcal{D}} f(x)\, dx = \int_{\mathcal{D}'} f(T(u))|det(T'(u))|\, du$$