Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
06 de Agosto de 2018

Clase Auxiliar #11: Convexidad y Optimización sin Restricciones

Profesor: Aris Daniilidis
Auxiliares: Matías Altamirano, Freddy Flores, Pablo López

P1. Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Se define el epigrafo estrico de f como sigue:

$$epi_{<}(f) = \{(x, \mu) \,:\, x \in \mathcal{X},\, \mu \in \mathbb{R},\, \mu > f(x)\} \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{R}$$

(a) Muestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) f es convexa.

ii) $\text{epi}_{<}(f)$ es convexo.

(b) Sea $f_1 : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ y $f_2 : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Se define $f_1 \Box f_2$ de la siguiente manera:

$$(f_1 \Box f_2)(x) = \inf\{f_1(x_1) + f_2(x_2) \,:\, x_1, x_2 \in \mathcal{X} \,,\, x_1 + x_2 = x\}$$

Demuestre que si f_1, f_2 son funciones convexas entonces $f = f_1 \Box f_2$ es una función convexa.

P2. Considere las funciones $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f(u) = (u-1)^2(u+1); \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz$$

(a) Demuestre que g es una función convexa.

(b) Calcule los mínimos de g y pruebe que g es no-negativa.

(c) Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F = f \circ g$$

Calcule $\nabla F(x, y, z)$ y muestre que el conjunto de puntos donde se anula es:

$$N = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, g(x) = 1\} \cup \{0\}$$

(d) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}^3$ se cumple:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = f''(g(x)) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) + f'(g(x)) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

(e) Demuestre que 0 es un máximo local de F.

(f) Demuestre que si a es un punto que verifica $g(a) = 1$, entonces es mínimo local de F.

P3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = x^2 + \cos(x) + y^2 - y$

(a) Encuentre y estudie la naturaleza de los puntos críticos de f.

(b) Demuestre que f tiene un mínimo global.

P4. Hallar y clasificar los puntos críticos de:

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}(3x^2 + 5y^2)$$