

Pl $l^\infty(N) \equiv \{ (x(n))_{n \in N} \mid \sup_{n \in N} |x(n)| < +\infty \}$, con

$$\|(x(n))_{n \in N}\|_\infty \equiv \sup_{n \in N} |x(n)|, \quad \forall (x(n))_{n \in N} \in l^\infty(N).$$

a) Prove que $\|\cdot\|_\infty$ efectivamente define una norma

Sol: 1) $\|f\|_\infty < +\infty, \forall f \in l^\infty(N)$:

Directo de la def. del espacio.

2) $\|f\|_\infty \geq 0, \forall f \in l^\infty(N)$:

Directo, ya que es un supremo de un módulo.

3) $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$:

$\Leftarrow$ Obvia.

$\Rightarrow$ Como $\|x(n)\|_\infty = 0$, entonces

$$\sup_n |x(n)| = 0. \text{ Sea } n \in N.$$

$$0 \leq |x(n)| \leq \sup_n |x(n)| = 0$$

$$\Rightarrow |x(n)| = 0, \forall n \in N$$

$$\Rightarrow x(n) = 0, \forall n \in N$$

$$\Rightarrow x = (0, 0, 0, \dots)$$

4) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty, \forall f \in l^\infty(N)$:

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_\infty &= \|\lambda(x(n))_{n \in N}\|_\infty = \sup_n |\lambda x(n)| = \sup_n |\lambda| \cdot |x(n)| = |\lambda| \cdot \sup_n |x(n)| \\ &= |\lambda| \cdot \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

5) $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty, \forall f, g \in l^\infty(N)$:

$$\begin{aligned} \|x+y\|_\infty &= \sup_n |x(n) + y(n)| \leq \sup_n (|x(n)| + |y(n)|) \leq \sup_n |x(n)| + \sup_n |y(n)| \\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \end{aligned}$$

$\therefore \|\cdot\|_\infty$ es norma. 

b) Muestre que los suc. de Cauchy de $f^n(N)$ son acotados.

Sol: Basta recordar que en todo EVN, los suc. de Cauchy son acotados. $\square$

c) Sea $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \ell^\infty(\mathbb{N})$ suc. de Cauchy, sea $(x_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}}$.
 Pruebe que para un $n \in \mathbb{N}$ fijo, $(x_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$ es Cauchy en $\mathbb{R}$.

Sol: ~~Sea $(x_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$ la suc. $(x_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$~~
 Sea $n \in \mathbb{N}$. Nótese que en la suc. $(x_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$ el índice que "corre" es $i \in \mathbb{N}$. ~~Seas sea $\varepsilon > 0$ y $i, j \in \mathbb{N}$ por ε fijo.~~

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall i, j \geq N, |x_i^{(n)} - x_j^{(n)}| < \varepsilon.$$

Como $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\ell^\infty(\mathbb{N})$, entonces

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall i, j \geq N, \|x_i - x_j\|_\infty < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall i, j \geq N, \sup_m |x_i^{(m)} - x_j^{(m)}| < \varepsilon$$

~~Por lo tanto $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que~~

$$|x_i^{(n)} - x_j^{(n)}| \leq \sup_m |x_i^{(m)} - x_j^{(m)}| \quad (\text{por el supremo se gana a todos})$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall i, j \geq N, |x_i^{(n)} - x_j^{(n)}| < \varepsilon \quad \square$$

d) Sea $(\bar{x}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ el límite en $\mathbb{R}$ de la suc. def. elcs.

Pruebe que $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \ell^\infty(\mathbb{N})$ converge a $\bar{x}$ en $\|\cdot\|_\infty$.

Sol: Hagamos el siguiente esquema para no perdernos (esto no tiene ptje.; es sólo para que se entiendan los argumentos $\smile$):

$$\begin{array}{c}
 \text{el "n" ave} \rightarrow \\
 \begin{array}{c} \text{el "i" ave} \downarrow \end{array}
 \begin{array}{|cccc|}
 \hline
 x_1(1) & x_1(2) & x_1(3) & \dots x_1(n) \dots \\
 x_2(1) & x_2(2) & x_2(3) & \dots x_2(n) \dots \\
 x_3(1) & x_3(2) & x_3(3) & \dots x_3(n) \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\
 x_i(1) & x_i(2) & x_i(3) & \dots x_i(n) \dots \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Básicamente, una fila en esta matriz representa a una sucesión real, que a su vez es el elemento i -ésimo de la suc. $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \ell^\infty(\mathbb{N})$.

Nótese que en (C) probamos (o en vola no $\wedge$) que las sucesiones correspondientes a las columnas (que son suc. reals) son de Cauchy en $\mathbb{R}$, y por lo tanto convergen a un real $\bar{x}(n)$. O sea, cada columna converge a un real $\bar{x}(n)$, una columna.

Así, al juntar todos estos $\bar{x}(n)$'s, podemos constituir una suc. real $\bar{x} \doteq (\bar{x}(n))_{n \in \mathbb{N}}$. Vemos al grano:

Def: $x_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_\infty} \bar{x}$ (es decir, conv. en $\ell^\infty(\mathbb{N})$).

~~En efecto, se ve que $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es Cauchy,~~

Sea $\varepsilon > 0$. Como $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es Cauchy, $\exists$ para el $\varepsilon > 0$ que tomamos, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal $\forall i, j \geq N$,

$$\|x_i - x_j\|_\infty < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow \sup_n |x_i(n) - x_j(n)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_i(n) - x_j(n)| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$.

En esta última expresión, al tomar $j \rightarrow \infty$ (por los
 metros por continuidad de 1.1), se tiene que
 $|x_i(n) - \bar{x}(n)| < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$
 y así, todos suponen este $n \in \mathbb{N}$:

$$\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_i(n) - \bar{x}(n)| < \epsilon$$

~~$$\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_i(n) - \bar{x}(n)| < \epsilon$$~~

$$\Leftrightarrow \|x_i - \bar{x}\|_{\infty} < \epsilon.$$

d) Concluye:

Sol: Ya hemos hecho todo el trabajo. Tomamos
 $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \ell^{\infty}(\mathbb{N})$ de Cauchy y encontramos un
 $\bar{x} = (\bar{x}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_i \xrightarrow{\|\cdot\|_{\infty}} \bar{x}$. Solo
 resta probar que $\bar{x} \in \ell^{\infty}(\mathbb{N})$. En efecto, por
 (b), tenemos que $\exists M \geq 0$ tal $\|x_i\|_{\infty} \leq M, \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sup_n |x_i(n)| \leq M, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_i(n)| \leq M, \forall i \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$;
 es decir, todas las entradas de la matriz anterior están
 acotadas uniformemente; con ello, en particular cada columna
 está acotada por M , y así su límite, $\bar{x}(n)$,
 estará acotado por M también, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$\Leftrightarrow |\bar{x}(n)| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sup_n |\bar{x}(n)| \leq M < +\infty \Rightarrow |\bar{x}(n)|_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^{\infty}(\mathbb{N})$$

y $\therefore \ell^{\infty}(\mathbb{N})$ es Banach. 